THÈSE

DE DOCTORAT DE TROISIÈME CYCLE DE MATHÉMATIQUES PURES

présentée

A L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE
DE GRENOBLE

par

Gilbert MURAZ

ANALYSE HARMONIQUE DANS LES ESPACES A ACCOUPLEMENTS

Soutenue le 13 juin 1972 devant la Commission d'examen

C. CHABAUTY Président
A. BERNARD
J.P. BERTRANDIAS
I. HALPERIN
Examinateurs

THÈSE

DE DOCTORAT DE TROISIÈME CYCLE DE MATHÉMATIQUES PURES

présentée

A L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE
DE GRENOBLE

par

Gilbert MURAZ

ANALYSE HARMONIQUE DANS LES ESPACES A ACCOUPLEMENTS

Soutenue le 13 juin 1972 devant la Commission d'examen

C. CHABAUTY Président
A. BERNARD
J. P. BERTRANDIAS Examinateurs
I. HALPERIN

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

SOMMAIRE

	Pages
INTRODUCTION	I
CHAPITRE I : Préliminaires	
A) Espaces $\cap(S)$ et $\Lambda(S)$	1
B) Espace $\mathfrak{N}_{r,c}$	4
C) Conclusion	6
CHAPITRE II : Espaces à accouplements	
A) Définitions	9
B) Dual d'un espace à accouplements	12
CHAPITRE III : Groupes d'opérateurs sur les espaces à accouplements	
A) Ensemble des opérateurs $\mathfrak{L}(\mathfrak{N})$	20
B) Groupes d'opérateurs	22
C) Sous-espaces $\mathcal{V}_x$	26
D) Application M	30
CHAPITRE IV : Caractérisation des opérateurs subordinatifs	
A) Opérateurs subordinatifs	35
B) Opérateurs subordinatifs dans les espaces de HILBERT	44
C) Caractérisation des opérateurs subordinatifs	47
D) Sous-espaces $\mathfrak{N}_{\mathcal{F}}$	56
CHAPITRE V : Intégration dans les espaces à accouplements	
A) Intégration par rapport à une $\mathfrak{A}$-mesure	59
B) $\mathfrak{L}$-mesures, mesures spectrales	73
C) Représentation spectrale des opérateurs	78
NOTATIONS	83
BIBLIOGRAPHIE	85

INTRODUCTION

Un problème important, dans l'étude des opérateurs, est leur représentation spectrale. Dans le cas des espaces de HILBERT, les résultats sont bien connus pour les opérateurs autoadjoints, unitaires ou normaux.

Rappelons certains de ces résultats :

Soient $\mathfrak{H}$ un espace de HILBERT et $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ l'algèbre des opérateurs continus de $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{H}$. Soit E une fonction d'ensemble définie sur les boréliens $\mathfrak{B}$ d'un espace localement compact X à valeurs dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$. E est appelé <u>mesure spectrale</u> si elle vérifie les conditions suivantes :

a) $E(A \cap B) = E(A)E(B)$ quel que soit A et B dans $\mathfrak{B}$, et $E(A).E(B) = 0$ si A et B sont disjoints

b) $E(A)^* = E(A) = E(A)^2$

c) $E(X) = I$ (opérateur identité sur $\mathfrak{H}$)

d) si $A = \bigcup_n A_n$, où les A_n sont deux à deux disjoints, alors

$$E(A) = \sum_n E(A_n)$$

c'est-à-dire pour tout x dans $\mathfrak{H}$

$$E(A)x = \sum_n E(A_n)x \quad .$$

Soit T un opérateur de $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{H}$, autoadjoint, ayant ses bornes inférieure et supérieure égales à m et M. Par le <u>théorème de HILBERT</u> [(23), p. 271] on peut faire correspondre à T une mesure spectrale E définie sur les boréliens de l'intervalle $[m,M]$ telle que

$$A^n = \int_m^M \lambda^n E(d\lambda)$$

pour tout entier n appartenant à $\mathbb{N}$.

Soient G un groupe localement compact abélien et Γ son groupe dual. Pour tout groupe $\{U_t\}_{t\in G}$ d'opérateurs unitaires, fortement continu, le théorème de STONE [(23), p. 378] nous assure l'existence d'une mesure spectrale (unique) définie sur les boréliens de Γ, telle que

$$U_t = \int_\Gamma \langle \gamma, t\rangle E(d\gamma)$$

où $\langle \gamma, t\rangle$ est la valeur prise par t considéré comme caractère sur Γ.

Des représentations spectrales d'opérateurs, sur des espaces plus généraux que les espaces de HILBERT, ont été obtenues dans de nombreux cas, en particulier par H.H. SCHAEFFER, I. TULCEA, E.R. LORCH, N. DUNFORD, J.T. SCHWARTZ, P. MASANI, W.M. BOGDANOWICZ.

L'objet de ce travail est d'abord l'étude des "espaces à accouplements" introduits pour placer dans un cadre général l'espace $\mathfrak{N}_{r,c}$ étudié par J.P. BERTRANDIAS ([2], [4]). Ces espaces de BANACH possèdent une norme définie à partir d'une "famille" de formes hermitiennes positives. Leur structure, proche de celles des espaces de HILBERT permet d'étendre les notions classiques d'opérateurs adjoints, autoadjoints, unitaires, groupe d'opérateurs unitaires et de se poser des problèmes de représentation spectrale. Nous nous intéresserons plus particulièrement à la notion de mesure spectrale et à une généralisation du théorème de STONE.

L'"analyse harmonique" des groupes $\{U_t\}_{t\in G}$ d'opérateurs unitaires [ch. III] dans les espaces à accouplements $\mathfrak{N}$ fait apparaître le rôle important des opérateurs continus T tels que pour tout x dans $\mathfrak{N}$, l'image Tx de x soit limite d'éléments de la forme $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_{t_i} x$. Ces opérateurs appelés subordinatifs commutent avec les éléments du groupe $\{U_t\}_{t\in G}$ [ch. IV, th. V] et sont caractérisés au chapitre IV.

Leurs propriétés nous amènent à développer une théorie de la meusre à valeurs dans l'espace des opérateurs subordinatifs sur $\mathfrak{N}$ [ch. V]. Les méthodes utilisées sont en partie inspirées par la théorie des mesures à accroissements orthogonaux ([17] et [18]).

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544309_0047

Cette manière d'aborder la question, différente de celle utilisée dans [2] pour les espaces $\mathfrak{N}_{r,c}$, permet d'obtenir dans le cas où l'ensemble $\mathcal{S}$ des opérateurs subordinatifs bornés contient suffisamment d'idempotents, une représentation intégrale pour les groupes (abélien localement compact) continus d'opérateurs unitaires sur un espace à accouplements $\mathfrak{N}$ et une représentation des opérateurs subordinatifs bornés (lorsque $\mathfrak{N}$ est séparable par exemple).

Que Monsieur J.P. BERTRANDIAS, qui a su m'intéresser à l'analyse et m'a permis de réaliser ce travail par ses nombreux conseils, veuille bien trouver ici l'expression de toute ma gratitude.

Je ne saurais oublier tout ce que je dois à Monsieur C. CHABAUTY ; il m'a permis de travailler à Grenoble dans les meilleures conditions. Je lui suis très reconnaissant d'avoir accepté de présider ce Jury.

Je remercie très vivement Monsieur A. BERNARD de s'être intéressé à ce travail et d'avoir accepté de participer au Jury.

Je suis très heureux que Monsieur I. HALPERIN m'ait fait l'honneur d'être membre du Jury ; je le prie d'accepter mes vifs remerciements.

Je remercie tout particulièrement Mademoiselle MARCHAND de sa gentillesse et de sa compétence ; elle a apporté à ce travail la présentation qui faisait défaut à mon manuscrit.

CHAPITRE I

PRELIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous introduisons trois espaces $\cap(S)$, $\Lambda(S)$ et $\mathfrak{N}_{r,c}$ étudiés par J.P. BERTRANDIAS [(3)], [(4)] qui sont à l'origine de la définition des espaces à accouplements. Notre but n'est pas de faire une étude de ces espaces, mais de motiver le cadre général dans lequel nous nous placerons.

Dans cet esprit, nous ne donnerons pas les démonstrations des résultats énoncés.

A - ESPACES $\cap(S)$ et $\Lambda(S)$

Soit $\mathcal{M}$ l'espace des mesures de Radon complexes bornées sur l'espace localement compact X , dual de l'espace $\mathcal{C}_o$ des fonctions continues sur X , nulles à l'infini.

Soit S un ensemble de mesures positives de $\mathcal{M}$, convexe, borné et compact pour la topologie $\sigma(\mathcal{M},\mathcal{C}_o)$.

Sur l'ensemble des fonctions complexes f définies sur X , appartenant à $L^2(s)$ quel que soit $s \in S$ et telles que :

$$\|f\|_s = \left(\int_X |f^2| ds\right)^{1/2} \leq M_f \quad \text{pour tout } s \text{ dans } S \qquad (1)$$

la relation "$f \equiv g$ si $f-g$ est S-nul" (c'est-à-dire $f-g$ est s-nul pour tout s dans S) est une relation d'équivalence.

L'ensemble des classes d'équivalence F, noté $\cap$ (ou $\cap(S)$) est un espace vectoriel complet pour la norme donnée par :

$$\|F\| = \sup_{s\in S} \|f\|_s = \sup_{s\in S}\left(\int_x |f|^2 ds\right)^{1/2} \qquad (2)$$

Application $\sim$ de $\mathcal{K}$ dans $\cap$.

Soit $\mathcal{K}$ l'espace des fonctions continues à support compact. Les éléments de $\mathcal{K}$ vérifient (1). L'application de $\mathcal{K}$ dans $\cap$ $f \mapsto \tilde{f}$ qui à une fonction de $\mathcal{K}$ associe sa classe d'équivalence est appelée application canonique.

L'application canonique est continue pour les topologies faibles $\sigma(\mathcal{K},\mathcal{M})$ et $\sigma(\cap,\cap')$. Elle admet une application transposée $\cap' \to \mathcal{M}$, notée $\smile$, continue pour les topologies faibles $\sigma(\cap',\cap)$ et $\sigma(\mathcal{M},\mathcal{K})$.

Le sous-espace fermé engendré par $\tilde{\mathcal{K}}$, image de $\mathcal{K}$ dans $\cap$, est noté Λ (ou $\Lambda(S)$).

Espace $\cup(S)$, dual de Λ.

Soit S un ensemble de mesures positives, borné en norme, convexe et compact pour la topologie vague $\sigma(\mathcal{M},\mathcal{K})$.

L'ensemble $\cup(S)$ (ou $\cup$) des mesures complexes bornées σ de la forme $d\sigma = \rho ds$, s dans S et ρ dans $L^2(s)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$.

L'expression $\|\sigma\|_{\cup} = \inf_{\substack{d\sigma=\rho ds \\ s\in S}} \|\rho\|_{L^2(s)}$ définit une norme sur l'espace $\cup$.

Théorème I.

Le dual fort de l'espace de Banach Λ s'identifie à l'espace normé $\cup$. La dualité entre les espaces Λ et $\cup$ est donnée par :

$$\langle f,\sigma\rangle = \int_x f\rho ds \quad \text{avec} \quad d\sigma = \rho ds .$$

Ce théorème est obtenu grâce au résultat intermédiaire suivant :

Lemme II.

L'ensemble Σ des mesures appartenant à la boule unité fermée de U est compact pour la topologie vague $\sigma(\mathcal{M},\mathcal{K})$.

Prolongements de l'application canonique $\mathcal{K} \to \cap$

Donnons deux résultats dont nous aurons besoin par la suite.

Soit $\mathcal{F}$ une sous-algèbre auto-adjointe de $\mathcal{M}'$, dual de l'espace des mesures $\mathcal{M}$.

Théorème III.

Si l'adhérence pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{M}'}$ de $\mathcal{F}$ contient $\mathcal{K}$ alors les conditions suivantes sont équivalentes :

a) l'application canonique $\mathcal{F} \to \cap$ existe et est continue pour les topologies faibles $\sigma(\mathcal{F},\mathcal{M})$ et $\sigma(\cap,\cap')$

b) l'ensemble Σ est compact pour la topologie $\sigma(\mathcal{M},\mathcal{F})$

c) l'ensemble S est compact pour la topologie $\sigma(\mathcal{M},\mathcal{F})$.

Ces conditions entraînent les propriétés suivantes :

d) l'image $\widetilde{B(\mathcal{K})}$ de la boule unité de $\mathcal{K}$ est dense dans l'image $\widetilde{B(\mathcal{F})}$ de la boule unité de $\mathcal{F}$

e) l'image $\widetilde{\mathcal{K}}$ de $\mathcal{K}$ est dense dans l'image $\tilde{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$.

Dans le cas $\mathcal{F} = \mathcal{C}$, ensemble des fonctions continues bornées sur X le théorème se démontre directement grâce à un résultat classique [(9), 5.3 p.63]

Un ensemble S de mesures positives est compact pour la topologie étroite $\sigma(\mathcal{M},\mathcal{C})$ si et seulement si il vérifie la condition de PROKHOROV :

i) $\sup_{s\in S} \|s\| < \infty$

ii) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de X tel que $s(X-K) < \varepsilon$ pour tout s dans S .

Théorème IV.

Si l'ensemble S est compact pour la topologie étroite $\sigma(\mathcal{M}, C)$ alors :

a) l'image $\tilde{C}$ de C est contenue dans $\Lambda(S)$

b) si X est un groupe localement compact abélien, l'image des polynômes trigonométriques $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle \gamma_i, x \rangle$ où les γ_i sont des éléments du groupe dual Γ de X, est dense dans $\Lambda(S)$.

B - ESPACE $\mathfrak{N}_{r,c}$

Soit f une fonction complexe définie sur $\mathbb{R}$, localement de carré intégrable.

- f est bornée en moyenne quadratique si

$$\|f\| = \limsup_{T \to +\infty} \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |f(t)|^2 dt \right]^{1/2} < \infty \qquad (1)$$

- f est régulière en moyenne quadratique si

pour tout h dans $\mathbb{R}$

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{T}^{T+h} |f(t)|^2 dt = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{-T+h} |f|^2 dt = 0 \qquad (2)$$

- f est continue en moyenne quadratique si

$$\lim_{h \to 0} \|f - f_h\| = 0 \qquad (3)$$

où f_h est la fonction translatée de f : $f_h(t) = f(t+h)$.

L'expression (1) définit sur l'espace vectoriel des fonctions bornées en moyenne quadratique une semi-norme invariante par translation ($\|f\| = \|f_h\|$) .

La relation "$f \equiv g$ si $\|f-g\| = 0$" est une relation d'équivalence.

L'ensemble des classes d'équivalence $\mathfrak{M}$ est un espace vectoriel complet (Espace de MARCINKIEWICZ) pour la norme

$$\|f\| = \limsup_{T \to +\infty} \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |f|^2 dt \right]^{1/2} .$$

L'ensemble $\mathfrak{N}_{r,c}$ des classes d'équivalence des fonctions bornées, régulières et continues en moyenne quadratique est un sous-espace vectoriel complet de $\mathfrak{N}$.

Ensembles de corrélation. Ensembles spectraux.

Soit f un élément de $\mathfrak{N}_{r,c}$. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des ultrafiltres sur $\mathbb{R}^+$, plus fins que le filtre engendré par les demi-droites $(T,+\infty)$. La norme de f est donnée par :

$$\|f\| = \sup_{u\in\mathcal{E}} \lim_{u} \left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} |f|^2 dt\right]^{1/2}$$

A f on associe l'ensemble des fonctions $\{\gamma_u\}_{u\in\mathcal{E}}$ définies par

$$\gamma_u(h) = \lim_{u} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} f(t+h)\overline{f(t)}dt$$

Ces fonctions sont continues d'après la condition (3). Cet ensemble est appelé ensemble de corrélation de f

Les fonctions de corrélation γ_u sont des fonctions définies positives d'après (2) et sont des transformées de FOURIER-STIELTJES de mesures positives. L'enveloppe convexe fermée S_f de l'ensemble de ces mesures est appelée ensemble spectral de f .

Théorème V.

L'ensemble des mesures S_f est compact pour la topologie étroite $\sigma(\mathcal{M},\mathcal{C})$.

Théorème VI.

Etant donné un ensemble S convexe étroitement compact de mesures positives, il existe une fonction f de $\mathfrak{N}_{r,c}$ telle que $S = S_f$.

Un résultat important dans l'étude des espaces $\mathfrak{N}_{r,c}$ est un théorème d'isomorphisme permettant l'utilisation d'espaces $\Lambda(S)$.

Notons $\mathcal{V}_f$, le sous-espace fermé engendré par les fonctions translatées de f .

Théorème VII.

$\mathcal{V}_f$ est isomorphe et isométrique à $\Lambda(S_f)$.

Ce théorème est utile en particulier pour l'étude de certains opérateurs invariants par translation sur $\mathfrak{N}_{r,c}$.

Soit $\mathfrak{L}(\mathfrak{N}_{r,c})$ l'ensemble des opérateurs de $\mathfrak{N}_{r,c}$,c'est-à-dire des applications linéaires continues de $\mathfrak{N}_{r,c}$ dans $\mathfrak{N}_{r,c}$. C'est une algèbre de Banach pour la norme :

$$\|T\| = \sup_{\|f\|=1} \|Tf\|$$

Les opérateurs $\tau_h : f \to f_h = f(t+h)$ sont des isométries.

L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{N}_{r,c})$ $h : \to \tau_h$ est un homomorphisme de groupe :

$$\tau_h \circ \tau_k = \tau_{h+k} \quad .$$

Cette application est continue si on munit l'espace $\mathfrak{L}(\mathfrak{N}_{r,c})$ de la topologie forte d'opérateurs d'après (3).

Une famille intéressante d'opérateurs est celle des opérateurs subordinatifs T tels que T(f) appartienne à $\mathcal{V}_f$ pour tout f dans $\mathfrak{N}_{r,c}$. Ces opérateurs sont invariants par translation, c'est-à-dire $\tau_h \circ T = T \circ \tau_h$.

L'ensemble des opérateurs subordinatifs est le sous-espace vectoriel fortement fermé de $\mathfrak{L}(\mathfrak{N}_{r,c})$ engendré par les translations $\{\tau_h\}_{h\in\mathbb{R}}$. C'est une sous-algèbre de $\mathfrak{L}(\mathfrak{N}_{r,c})$ caractérisée par le résultat suivant :

Théorème VIII.

L'algèbre des opérateurs subordinatifs sur $\mathfrak{N}_{r,c}$ est isomorphe et isométrique à $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

C - CONCLUSION

Les normes des espaces vectoriels décrits dans ce chapitre sont toutes obtenues à partir d'une famille de formes hermitiennes positives.

Dans le cas des espaces $\cap$ et Λ, ces formes hermitiennes sont données par :

$$H_s(f,g) = \int_X f\bar{g}ds \quad \text{pour tout } s \text{ dans } S$$

L'expression de la norme d'un élément peut s'écrire :

$$\|f\| = \sup_{s\in S} [H_s(f,f)]^{1/2}$$

Sur l'espace $\mathfrak{N}_{r,c}$, les ultrafiltres u de $\mathcal{E}$ définissent une famille de formes hermitiennes positives :

$$H_u(f,g) = \lim_u \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f\bar{g}dt$$

La norme d'un élément f de $\mathfrak{N}_{r,c}$ s'obtient par :

$$\|f\| = \sup_{u\in\mathcal{E}} [H_u(f,f)]^{1/2}$$

L'étude de ces espaces peut se placer dans le cadre général des espaces vectoriels normés où la norme est obtenue à partir d'une famille $\mathcal{H}$ de formes hermitiennes positives par :

$$\|f\| = \sup_{H\in\mathcal{H}} [H(f,f)]^{1/2}$$

Pour les espaces $\cap$, Λ et $\mathfrak{N}_{r,c}$, les ensembles $\mathcal{H}$ sont des ensembles topologiques compacts. D'une manière plus précise, dans les cas Λ et $\mathfrak{N}_{r,c}$ les applications $H \to H(f,g)$ sont continues ce qui implique que l'ensemble $\mathcal{H}$ est compact pour la topologie la plus faible rendant continues les applications $H \to H(f,g)$, appelée <u>topologie ponctuelle</u> [Ch. II, A.2]. Cette condition est très importante pour la recherche du dual [Lemme 2].

La condition de convexité de l'ensemble $\mathcal{H}$ pour l'espace Λ n'est pas une condition restrictive [Ch. II, A.2], mais permet d'obtenir une bonne représentation du dual (l'espace $\cup$ est un espace vectoriel). Dans l'espace $\mathfrak{N}_{r,c}$ cette condition n'est pas réalisée et a amené certaines complications (construction de fonctions) dans la démonstration directe du théorème 8.

Pour obtenir une généralisation intéressante des espaces de type Λ et $\mathfrak{N}_{r,c}$ nous supposerons donc que l'ensemble $\mathcal{H}$ est <u>convexe</u> et <u>compact pour</u>

la topologie ponctuelle.

Les résultats obtenus dans la théorie des espaces Λ (en particulier la caractérisation du dual) seront encore valables [Ch. II]. Par l'intermédiaire d'un théorème d'isomorphisme sur des espaces Λ analogue au théorème 7, nous pourrons ensuite étudier sans complications inutiles des propriétés d'analyse harmonique pour certains groupes d'opérateurs sur ces espaces :

- Caractérisation des opérateurs subordinatifs (Ch. IV)
- Représentation spectrale de certains opérateurs (Ch. V)

CHAPITRE II

ESPACES A ACCOUPLEMENTS

A - DEFINITIONS

Soit $\mathfrak{N}$ un espace vectoriel complexe. Une application a de $\mathfrak{N} \times \mathfrak{N}$ dans $\mathbb{C}$ est une forme hermitienne positive si, pour tout $(x,y) \in \mathfrak{N} \times \mathfrak{N}$ nous avons :

- $a(x,y)$ est linéaire en x
- $a(x,y) = \overline{a(y,x)}$
- $a(x,x) \geq 0$

Un ensemble $\mathcal{A}$ de formes hermitiennes positives sur $\mathfrak{N}$ est appelé ensemble d'accouplements si

pour tout x dans $\mathfrak{N}$, différent de 0, il existe un élément a de $\mathcal{A}$ tel que $a(x,x) \neq 0$.

Il est évident que tout espace complexe admet un ensemble d'accouplements. En effet, il suffit de prendre l'ensemble $\mathcal{A} = \{a(x,y)=\ell(x)\overline{\ell(y)}$, pour $\ell \in \mathfrak{N}^*$, $\mathfrak{N}^*$ dual algébrique de $\mathfrak{N}\}$.

1. THEOREME

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble d'accouplements sur $\mathfrak{N}$.

Si pour tout x dans $\mathfrak{N}$, l'expression $[a(x,x)]^{1/2}$ est bornée sur $\mathcal{A}$ alors $\mathfrak{N}$ est un espace vectoriel normé pour la norme d'accouplements :

$$\|x\| = \sup_{a \in \mathcal{A}} [a(x,x)]^{1/2}$$

Toute norme d'espace vectoriel est une norme d'accouplements.

Démonstration :

La définition de l'ensemble $\mathcal{A}$ implique que $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Les formes hermitiennes positives vérifient l'inégalité de SCHWARZ, c'est-à-dire : pour tout (x,y) dans $\mathfrak{N} \times \mathfrak{N}$,

$$|a(x,y)| \leq [a(x,x)]^{1/2} . [a(y,y)]^{1/2} \qquad (1)$$

Comme conséquence les éléments a de $\mathcal{A}$ sont tels que :

$$[a(x+y,x+y)]^{1/2} \leq [a(x,x)]^{1/2} + [a(y,y)]^{1/2}$$

En passant à la borne supérieure sur $\mathcal{A}$ nous obtenons :

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

La linéarité de a donne la relation :

$$[a(\lambda x,\lambda x)]^{1/2} = [\lambda\bar{\lambda}]^{1/2}[a(x,x)]^{1/2} = |\lambda|[a(x,x)]^{1/2}$$

soit

$$\|\lambda x\| = \sup_{a\in\mathcal{A}}[a(\lambda x,\lambda x)]^{1/2} = |\lambda| \sup_{a\in\mathcal{A}} [a(x,x)]^{1/2} = |\lambda|\,\|x\| \quad .$$

D'autre part, soient E un espace vectoriel normé, B' la boule unité de son dual topologique et $\mathcal{A}$ l'ensemble $\mathcal{A} = \{a(x,y) = \ell(x)\overline{\ell(y)} \;\; \ell\in B'\}$. L'ensemble $\mathcal{A}$ est un ensemble d'accouplements et nous avons bien :

$$\|x\| = \sup_{\ell\in B'} |\ell(x)| = \sup_{\ell\in B'} [\ell(x)\overline{\ell(x)}]^{1/2}$$

2. DEFINITION DES ESPACES A ACCOUPLEMENTS

L'inégalité de SCHWARZ (1) implique que si $\mathcal{A}$ munit l'espace vectoriel $\mathfrak{N}$ d'une norme alors l'ensemble $\mathcal{A}$ est contenu dans la boule unité $B_{\mathcal{H}}$ de l'ensemble $\mathcal{H}$ des formes hermitiennes continues sur $\mathfrak{N}$.

L'ensemble $\mathcal{H}$ est canoniquement isomorphe à l'ensemble $B(\mathfrak{N},\bar{\mathfrak{N}})$ des formes bilinéaires continues sur $\mathfrak{N} \times \bar{\mathfrak{N}}$ où $\bar{\mathfrak{N}}$ est l'espace vectoriel complexe muni de la loi externe $*$ définie par $\lambda * x = \bar{\lambda}.x$. L'ensemble des formes

bilinéaires $B(\mathfrak{N},\bar{\mathfrak{N}})$ muni de sa norme, s'identifie [(27), p. 438] au dual fort du produit tensoriel $\mathfrak{N} \overset{\pi}{\otimes} \bar{\mathfrak{N}}$. La topologie faible sur $B(\mathfrak{N},\bar{\mathfrak{N}})$ obtenue par la dualité avec l'espace $\mathfrak{N} \overset{\pi}{\otimes} \bar{\mathfrak{N}}$ correspond, en restriction à l'ensemble $\mathcal{A}$, à la topologie la plus faible rendant continues toutes les applications $a \to f(a) = a(x,y)$ lorsque x et y varient dans $\mathfrak{N}$.

Cette topologie définie sur $\mathcal{A}$ est appelée <u>topologie ponctuelle</u>.

Le théorème de BANACH-ALAOGLU montre que la boule unité de $B(\mathfrak{N},\bar{\mathfrak{N}})$ est faiblement compacte et que l'adhérence faible $\bar{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ dans $B(\mathfrak{N},\bar{\mathfrak{N}})$ est compacte. Il est immédiat de vérifier que l'ensemble $\bar{\mathcal{A}}$ est encore un ensemble d'accouplements pour $\mathfrak{N}$ et que les normes définies à partir de $\mathcal{A}$ et de $\bar{\mathcal{A}}$ coïncident.

De même, en notant $\mathcal{A}'$ l'enveloppe convexe de $\mathcal{A}$ dans $B(\mathfrak{N},\bar{\mathfrak{N}})$ les normes définies à partir de $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{A}$ sont identiques.

Compte-tenu des exemples traités dans le premier chapitre et des propriétés des normes d'accouplements, nous sommes amenés à donner la définition suivante :

<u>Définition</u> :

<u>Soient</u> $\mathfrak{N}$ <u>un espace vectoriel et</u> $\mathcal{A}$ <u>un ensemble d'accouplements munissant</u> $\mathfrak{N}$ <u>d'une norme</u> ; $(\mathfrak{N},\mathcal{A})$ <u>est appelé espace à accouplements si</u> :

a) $\mathcal{A}$ <u>est un ensemble convexe et compact pour la topologie ponctuelle</u>.

b) $\mathfrak{N}$ <u>est un espace de Banach pour la norme d'accouplements</u>.

La compacité de l'ensemble $\mathcal{A}$ implique pour tout x dans $\mathfrak{N}$ l'existence d'un élément a_x de $\mathcal{A}$ qui réalise la norme de x

$$\|x\| = [a_x(x,x)]^{1/2}$$

<u>Remarque I</u> :

Dans le cas où l'ensemble $\mathcal{A}$ est réduit à un seul élément l'espace $\mathfrak{N}$ est un espace de Hilbert, mais un espace de Hilbert peut se représenter comme espace à accouplements avec un ensemble $\mathcal{A}$ non réduit à un seul élément.

Remarque II :

Tout espace de Banach est un espace à accouplements pour l'ensemble $\mathcal{A}$ des formes hermitiennes positives de normes inférieures à 1 .

Remarque III :

▪ Dans les exemples du chapitre I, seul l'espace (Λ,S) est un espace à accouplements.

▪ Dans le cas $(\cap,S)$, l'ensemble S est compact ponctuel si et seulement si S est compact pour la topologie $\sigma(\mathcal{M},\mathcal{M}')$ où $\mathcal{M}'$ est le dual de $\mathcal{M}$.

▪ Pour l'espace $\mathfrak{N}_{r,c}$ l'ensemble $\mathcal{E}$ des ultrafiltres n'est pas convexe. L'enveloppe convexe fermée des formes hermitiennes définies à partir de $\mathcal{E}$ est l'ensemble des mesures positives bornées par 1 , portées par le complémentaire de $\mathbb{R}^+$ dans le compactifié de STONE-ČECH [(12), p. 82] $\beta\mathbb{R}^+$ de $\mathbb{R}^+$.

B - DUAL D'UN ESPACE A ACCOUPLEMENTS

Application $L(a,y)$

Les éléments de $\mathcal{A}$ étant des formes hermitiennes, nous avons de façon naturelle une application L de $\mathcal{A}\times\mathfrak{N}$ dans $\mathfrak{N}'$, dual fort de $\mathfrak{N}$ définie par :

$$L(a,y)(x) = a(x,y)$$

La linéarité et la continuité de a impliquent l'inégalité

$$\|L(a,y)\|_{\mathfrak{N}'} \leq [a(y,y)]^{1/2} \leq \|y\|_{\mathfrak{N}}$$

Application ℓ_a

Un accouplement a de $\mathcal{A}$ définit une semi-norme sur $\mathfrak{N}$ et l'espace normé correspondant est un espace préhilbertien. Nous noterons $\mathfrak{N}_a$ l'espace de Hilbert, complété de l'espace préhilbertien associé à a , et $\bar{y}$ les éléments de $\mathfrak{N}_a$.

Il existe évidemment une application canonique, linéaire, continue de $\mathfrak{N}$ dans $\mathfrak{N}_a$, tel que l'image de $\mathfrak{N}$ soit dense dans $\mathfrak{N}_a$. Les éléments de l'image de $\mathfrak{N}$ sont encore notés x.

L'espace de Hilbert $\mathfrak{N}_a$ est isomorphe et isométrique à son dual $\mathfrak{N}'_a$. La transposée ℓ_a de l'application canonique de $\mathfrak{N}$ dans $\mathfrak{N}_a$ est continue et injective [(8), p. 101].

L'application ℓ_a est déterminée par :

$$\ell_a : \mathfrak{N}'_a \longrightarrow \mathfrak{N}'$$

$$\ell_a(\bar{y})(x) = a(x,\bar{y})$$

La continuité de l'application ℓ_a donne :

$$\|\ell_a(\bar{y})\|_{\mathfrak{N}'} \leq \|\bar{y}\|_{\mathfrak{N}_a} = [a(\bar{y},\bar{y})]^{1/2}$$

Notation.

- L'ensemble des éléments de $\mathfrak{N}'$ tels qu'il existe a dans $\mathcal{A}$ et $\bar{y}$ dans $\mathfrak{N}_a$ avec $\ell = \ell_a(\bar{y})$ est noté $\bigcup_{a\in\mathcal{A}} \mathfrak{N}_a$

$$\bigcup_{a\in\mathcal{A}} \mathfrak{N}_a = \{\ell\in\mathfrak{N}', \exists a\in\mathcal{A}, \exists\bar{y}\in\mathfrak{N}_a : \ell = \ell_a(\bar{y})\}$$

- L'ensemble des éléments a de $\mathcal{A}$ associé à ℓ est noté $\mathcal{A}_\ell$

$$\mathcal{A}_\ell = \{a\in\mathcal{A}, \exists\bar{y}\in\mathfrak{N}_a : \ell = \ell_a(\bar{y})\}$$

1. Propriété

L'ensemble $\bigcup_{a\in\mathcal{A}} \mathfrak{N}_a$ est un espace vectoriel normé pour la norme :

$$N(\ell) = \inf_{\substack{a\in\mathcal{A}_\ell \\ \bar{y}:\ell_a(\bar{y})=\ell}} [a(\bar{y},\bar{y})]^{1/2}$$

Démonstration :

a) $\bigcup_{a\in\mathcal{A}} \mathfrak{N}_a$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{N}'$

Soient λ un nombre complexe, ℓ_1 et ℓ_2 dans $\bigcup_{a\in\mathcal{A}} \mathfrak{N}_a$; par définition il existe a_1 et a_2 dans $\mathcal{A}$, $\bar{y}_1$ dans $\mathfrak{N}_{a_1}$, $\bar{y}_2$ dans $\mathfrak{N}_{a_2}$ tels

que : $\ell_1 = \ell_{a_1}(\bar{y}_1)$ et $\ell_2 = \ell_{a_2}(\bar{y}_2)$.

L'élément $\lambda\ell_1$ de $\mathfrak{R}'$ s'écrit pour tout x dans $\mathfrak{R}$:

$$\lambda\ell_1(x) = \lambda\ell_{a_1}(\bar{y}_1)(x) = \lambda\, a_1(x,\bar{y}_1) = a_1(x,\bar{\lambda}\,\bar{y}_1)$$

c'est-à-dire

$$(\lambda\ell_1) = \ell_{a_1}(\bar{\lambda}\,\bar{y}_1) .$$

Il reste à démontrer que l'addition est une loi interne dans $\bigcup_{a\in\mathcal{A}} \mathfrak{R}_a$. L'élément $\ell = \ell_1 + \ell_2$ de $\mathfrak{R}'$ s'écrit pour tout x dans $\mathfrak{R}$

$$\ell(x) = (\ell_1 + \ell_2)(x) = a_1(x,\bar{y}_1) + a_2(x,\bar{y}_2)$$

L'inégalité de SCHWARZ pour les formes hermitiennes donne :

$$|\ell(x)| \leq [a_1(x,x)]^{1/2}[a_1(\bar{y}_1,\bar{y}_1)]^{1/2} + [a_2(x,x)]^{1/2}[a_2(\bar{y}_2,\bar{y}_2)]^{1/2}$$

En posant $\alpha_1 = \|\bar{y}_1\|_{\mathfrak{R}_{a_1}}$ et $\alpha_2 = \|\bar{y}_2\|_{\mathfrak{R}_{a_2}}$ l'inégalité devient :

$$|\ell(x)| \leq [a_1(x,x)]^{1/2}\alpha_1 + [a_2(x,x)]^{1/2}\alpha_2$$

$$|\ell(x)| \leq (\alpha_1+\alpha_2)\left\{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}[a_1(x,x)] + \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}[a_2(x,x)]\right\}^{1/2}$$

La convexité de $\mathcal{A}$ assurel'existence d'un élément a_3 dans $\mathcal{A}$ tel que $a_3 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}a_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}a_2$; nous obtenons :

$$|\ell(x)| \leq (\alpha_1+\alpha_2)[a_3(x,x)]^{1/2}$$

L'image de $\mathfrak{R}$ dans $\mathfrak{R}_{a_3}$ est dense ; la forme linéaire ℓ peut se prolonger à $\mathfrak{R}_{a_3}$; il existe donc un élément $\bar{y}_3$ dans $\mathfrak{R}_{a_3}$ tel que :

$$\ell(x) = a_3(x,\bar{y}_3)$$

c'est-à-dire $\ell = \ell_{a_3}(\bar{y}_3)$ en restriction à $\mathfrak{R}$, ce qui achève la démonstration. L'inégalité suivante est alors vérifiée :

$$\|\ell\| \leq \|\bar{y}_3\|_{\mathfrak{R}_{a_3}} \leq \alpha_1 + \alpha_2 \qquad (1)$$

b) $N(\ell)$ est une norme

■ Si ℓ est la forme linéaire nulle alors $N(\ell)$ est forcément nul.

■ L'égalité $N(\ell) = 0$ implique l'existence pour tout $\varepsilon > 0$ d'un élément a de $\mathcal{A}$ et de $\bar{y}$ dans $\mathfrak{N}_a$ avec $\ell = \ell_a(\bar{y})$ et $a(\bar{y},\bar{y}) < \varepsilon$. C'est-à-dire pour tout x dans $\mathfrak{N}$:

$$|\ell(x)| = a(x,\bar{y}) \leq \varepsilon[a(x,x)]^{1/2} \leq \varepsilon\|x\| .$$

L'inégalité étant vraie pour tout ε , ℓ est donc la forme linéaire identiquement nulle.

■ Soient λ dans $\mathbb{C}$ et $\ell = \ell_a(\bar{y})$ avec $\bar{y}$ dans $\mathfrak{N}_a$; nous avons :

$$\lambda\ell = \ell_a(\bar{\lambda}\bar{y})$$

$$N(\lambda\ell) = \inf_{\substack{a\in\mathcal{A}_\ell \\ \bar{y}\in\mathfrak{N}_a,\ \ell=\ell_a(\bar{y})}} \|\bar{\lambda}\bar{y}\|_{\mathfrak{N}_a} = |\lambda| \inf_{\substack{a\in\mathcal{A}_\ell \\ \bar{y}\in\mathfrak{N}_a,\ \ell=\ell_a(\bar{y})}} \|\bar{y}\|_{\mathfrak{N}_a} = |\lambda| N(\ell)$$

■ Soient $\ell_1 = \ell_{a_1}(\bar{y}_1)$ et $\ell_2 = \ell_{a_2}(\bar{y}_2)$ avec $\bar{y}_1$ dans $\mathfrak{N}_{a_1}$ et $\bar{y}_2$ dans $\mathfrak{N}_{a_2}$; l'inégalité (1) donne :

$$N(\ell_1+\ell_2) \leq \alpha_1 + \alpha_2$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe a'_1, a'_2 dans $\mathcal{A}$, $\bar{y}'_1$ dans $\mathfrak{N}_{a'_1}$ et $\bar{y}'_2$ dans $\mathfrak{N}_{a'_2}$ tels que :

$$\ell_1 = \ell_{a'_1}(\bar{y}'_1) \quad \text{et} \quad \alpha_1 \leq N(\ell_1)+\varepsilon$$

$$\ell_2 = \ell_{a'_2}(\bar{y}'_2) \quad \text{et} \quad \alpha_2 \leq N(\ell_2)+\varepsilon$$

L'inégalité peut alors s'écrire :

$$N(\ell_1+\ell_2) \leq N(\ell_1) + N(\ell_2) + 2\varepsilon$$

La relation étant vérifiée pour tout nombre ε nous pouvons conclure :

$$N(\ell_1+\ell_2) \leq N(\ell_1) + N(\ell_2) .$$

2. Propriété

Pour tout élément ℓ de $\bigcup_{a\in\mathcal{A}} \mathfrak{N}_a$, il existe un élément a_o de $\mathcal{A}_\ell$ et $\bar{y}_o$ de $\mathfrak{N}_{a_o}$ réalisant la norme $N(\ell)$

$$N(\ell) = [a_o(\bar{y}_o, \bar{y}_o)]^{1/2}$$

L'application $a \to \sup_{\substack{\ell(x)\neq 0 \\ x\in\mathfrak{N}}} \frac{|\ell(x)|}{[a(x,x)]^{1/2}}$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est semi-continue inférieurement comme enveloppe supérieure des fonctions continues $a \to \frac{|\ell(x)|}{[a(x,x)]^{1/2}}$. Elle atteint son minimum sur $\mathcal{A}$ compact, c'est-à-dire il existe a_o dans $\mathcal{A}$ tel que :

$$\operatorname{Inf}_{a\in\mathcal{A}} \sup_{\substack{x\in\mathfrak{N} \\ \ell(x)\neq 0}} \frac{|\ell(x)|}{[a(x,x)]^{1/2}} = \sup_{\substack{x\in\mathfrak{N} \\ \ell(x)\neq 0}} \frac{|\ell(x)|}{[a_o(x,x)]^{1/2}}$$

Lorsque a est un élément de $\mathcal{A}_\ell$ l'expression $\sup_{\substack{x\in\mathfrak{N} \\ \ell(x)\neq 0}} \frac{|\ell(x)|}{[a(x,x)]^{1/2}}$ représente la norme de ℓ dans le dual $\mathfrak{N}'_a$ de l'espace de Hilbert $\mathfrak{N}_a$. L'ensemble $\mathcal{A}_\ell$ n'étant pas vide nous obtenons l'inégalité :

$$N(\ell) = \operatorname{Inf}_{a\in\mathcal{A}_\ell} \sup_{\substack{x\in\mathfrak{N} \\ \ell(x)\neq 0}} \frac{|\ell(x)|}{[a(x,x)]^{1/2}} \geq \sup_{\substack{x\in\mathfrak{N} \\ \ell(x)\neq 0}} \frac{|\ell(x)|}{[a_o(x,x)]^{1/2}}$$

Par conséquent, l'inégalité s'écrit $|\ell(x)| \leq N(\ell)[a_o(x,x)]^{1/2}$ c'est-à-dire ℓ est une forme linéaire continue sur $\mathfrak{N}_{a_o}$ et a_o est un élément de $\mathcal{A}_\ell$. Nous venons de démontrer l'existence de $\bar{y}_o$ dans $\mathfrak{N}_{a_o}$ tel que $\ell = \ell_{a_o}(\bar{y}_o)$ avec $N(\ell) = [a_o(\bar{y}_o, \bar{y}_o)]^{1/2}$.

3. Théorème

L'espace $\bigcup_{a\in\mathcal{A}} \mathfrak{N}_a$ muni de sa norme N est isomorphe et isométrique au dual de $\mathfrak{N}$.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de vérifier que la boule unité B_U de l'espace $\bigcup_{a\in\mathcal{A}} \mathfrak{N}_a$ est identique à la boule unité B' du dual fort $\mathfrak{N}'$ de $\mathfrak{N}$.

Le théorème est alors une conséquence des deux lemmes suivants :

Lemme I.

La boule unité B_U de $\bigcup_{a\in\mathcal{A}} \mathfrak{N}_a$ est dense dans la boule unité B' de $\mathfrak{N}'$ pour la topologie faible $\sigma(\mathfrak{N}', \mathfrak{N})$.

D'après les théorèmes généraux de la dualité [(8), 2 p. 52] le lemme est vrai si le polaire $B^\circ_U = \{x\in\mathfrak{N} , |\ell(x)|\leq 1 \text{ pour } \ell\in B_U\}$ de la boule unité B_U de $\bigcup_{a\in\mathcal{A}} \mathfrak{N}_a$ est égal à la boule unité B de $\mathfrak{N}$.

Les définitions de norme dans $\mathfrak{N}'$ et dans $\cup\mathfrak{N}_a$ impliquent que si ℓ est dans $\cup\mathfrak{N}_a$ alors $\|\ell\|_{\mathfrak{N}'} \leq N(\ell)$, donc pour tout x dans B et ℓ dans B_n $|\ell(x)| \leq N(\ell)\|x\| \leq 1$, c'est-à-dire $B \subset B^\circ_U$.

Soit x un élément non nul dans B°_U ,alors pour tout ℓ dans B_U nous avons $|\ell(x)| \leq 1$; en particulier l'inégalité reste vraie pour les éléments de la forme $\ell = \ell_a(\bar{y})$ avec $[a(\bar{y},\bar{y})]^{1/2} \leq 1$. Par conséquent, nous obtenons pour tout a dans $\mathcal{A}$:

$$[a(x,x)]^{1/2} = \sup_{\substack{\bar{y}\in\mathfrak{N}_a \\ \|\bar{y}\|_{\mathfrak{N}_a}\leq 1}} |a(x,\bar{y})| \leq 1$$

Nous déduisons immédiatement que $\|x\| = \sup_{a\in\mathcal{A}} [a(x,x)]^{1/2} \leq 1$, c'est-à-dire $B^\circ_U \subset B_U$.

Lemme II.

La boule unité B_U de $\bigcup_{a\in\mathcal{A}} \mathfrak{N}_a$ est faiblement compacte.

Soit $\mathcal{F}$ un filtre de B_U admettant ℓ_o comme point adhérent dans l'espace $\mathfrak{N}'$ et soit $\mathcal{F}_o$ une base de filtre plus fin que $\mathcal{F}$ convergeante vers ℓ_o . A chaque élément F de $\mathcal{F}_o$, associons l'ensemble F' des éléments a de $\mathcal{A}$ tels qu'il existe $\bar{y}$ dans $\mathfrak{N}_a$ avec $\ell_a(\bar{y})$ dans F . L'ensemble des parties $\mathcal{F}' = \{F'\}_{F\in\mathcal{F}_o}$ est une base de filtre sur $\mathcal{A}$.

Comme $\mathcal{A}$ est compact elle admet un point adhérent a_o .

Soient x dans $\mathfrak{N}$ et $\ell = \ell_a(\bar{y})$ dans B_U alors :

$$|\ell_a(\bar{y})(x)| = |a(\bar{x},\bar{y})| \leq \|x\| .$$

En prenant les éléments d'une partie F de $\mathcal{F}_o$ l'inégalité reste vraie et le passage à la borne inférieure donne :

$$\operatorname*{Inf}_{\ell\in F} |\ell(x)| \leq \operatorname*{Inf}_{a\in F'} [a(x,x)]^{1/2}[a(\bar{y},\bar{y}]^{1/2} \leq \operatorname*{Inf}_{a\in F'} [a(x,x)]^{1/2}$$

La base de filtre étant convergeante vers ℓ_o , nous avons :

$$\ell_o(x) = \lim_{\mathcal{F}_o} \operatorname{Inf} |\ell(x)| \leq \lim_{\mathcal{F}'} \operatorname{Inf} [a(x,x)]^{1/2} \leq [a_o(x,x)]^{1/2}$$

L'inégalité montre que ℓ_o est une forme linéaire sur $\mathfrak{N}_{a_o}$ c'est-à-dire ℓ_o est de la forme $\ell_o = \ell_{a_o}(\bar{y}_o)$ avec $\bar{y}_o$ dans $\mathfrak{N}_{a_o}$ tel que $[a_o(\bar{y}_o,\bar{y}_o)]^{1/2} \leq 1$. L'élément ℓ_o appartient à B_U ce qui achève la démonstration.

La représentation du dual entraîne évidemment que pour toute forme linéaire ℓ de $\mathfrak{N}'$ l'ensemble $\mathcal{A}_\ell$ n'est pas vide. Donnons quelques propriétés de ces ensembles que nous utiliserons par la suite.

4. Propriété

Soient $\mathcal{A}_{\ell_i}$ les sous-ensembles de $\mathcal{A}$ associés aux formes linéaires ℓ_i (non nulles) pour i variant de 1 à n , nous avons les propriétés suivantes :

a) $\mathcal{A}_{\ell_i}$ est un ensemble convexe.

b) $\bigcap_{i=1}^{i=n} \mathcal{A}_{\ell_i}$ n'est pas vide.

Soient $\{\ell_i\}_{i=1}^{i=n}$ n formes linéaires continues et a_i dans $\mathcal{A}$, $\bar{y}_i$ dans $\mathfrak{N}_{a_i}$ tels que les éléments ℓ_i admettent comme représentation $\ell = \ell_{a_i}(\bar{y}_i)$, pour $i = 1$ à n .

Soit $\ell_{b_i}(\bar{z}_i)$ une deuxième représentation de la forme linéaire ℓ_i .

Les inégalités suivantes sont alors vérifiées :

$$|\ell_i(x)| \leq [a_i(x,x)]^{1/2}[a_i(\bar{y}_i,\bar{y}_i)]^{1/2}$$

$$|\ell_i(x)| \leq [b_i(x,x)]^{1/2}[b_i(\bar{z}_i,\bar{z}_i)]^{1/2}$$

En posant $\alpha_i = [a_i(\bar{y}_i,\bar{y}_i)]^{1/2}$, $\beta_i = [b_i(\bar{z}_i,\bar{z}_i)]^{1/2}$ et $a = ta_i + (1-t)b_i$ pour t dans $\mathbb{R}$ avec $0 \leq t \leq 1$ nous avons :

$$|\ell_i(x)|^2 \leq ta_i(x,x)\alpha_1^2 + (1-t)b_i(x,x)\beta_i^2$$

$$|\ell_i(x)| \leq [a(x,x)]^{1/2}(\alpha_i^2+\beta_i^2)^{1/2}$$

La forme ℓ_i est un élément du dual de $\mathfrak{N}_a$, il existe donc $\bar{y}$ dans $\mathfrak{N}_a$ tel que $\ell = \ell_a(\bar{y})$, c'est-à-dire a est dans $\mathcal{A}_\ell$.

$\bigcap_{i=1}^{i=n} \mathcal{A}_{\ell_i}$ n'est pas vide.

En effet, puisque $\mathcal{A}$ est convexe, en notant a l'élément $a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$, il est immédiat de vérifier que :

$$|\ell_i(x)| \leq k_i[a(x,x)]^{1/2} \quad \text{pour} \quad i=1 \text{ à } n$$

Par un raisonnement analogue au précédent nous déduisons que a est un élément de $\mathcal{A}_{\ell_i}$ pour $i = 1$ à n .

CHAPITRE III

GROUPES D'OPERATEURS SUR LES ESPACES A ACCOUPLEMENTS

A - ENSEMBLE DES OPERATEURS $\mathcal{L}(\mathfrak{N})$

L'ensemble $\mathcal{L}(\mathfrak{N})$ des opérateurs continus de $\mathfrak{N}$ dans $\mathfrak{N}$ possède une structure d'algèbre. En général, trois topologies sont utilisées sur cet ensemble [(11), 1.2.3 p.476] : la topologie uniforme, la topologie forte et la topologie faible. Il est intéressant dans notre cas d'introduire la topologie σ-faible.

La topologie uniforme d'opérateurs est définie par la norme habituelle :

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in\mathfrak{N} \\ \|x\|\leq 1}} \|Tx\|$$

La topologie forte d'opérateurs est donnée par la base de voisinages :

$$V(T, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) = \{S \in \mathcal{L}(\mathfrak{N}), \|(S-T)x_i\| < \varepsilon \quad i=1 \text{ à } n\}$$

Pour cette topologie un filtre d'opérateurs $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{F}}$ converge vers T si pour tout x dans $\mathfrak{N}$ le filtre $\{T_\alpha x\}_{\alpha\in\mathcal{F}}$ converge vers Tx pour la norme dans $\mathfrak{N}$. Le dual topologique de $\mathcal{L}(\mathfrak{N})$ muni de la topologie forte est isomorphe à l'espace $\mathfrak{N} \otimes \mathfrak{N}'$ [(8), p. 77].

La topologie faible d'opérateurs est donnée par la base de voisinages

$$V_{(T, x_1, \ldots, x_n, \ell_1, \ldots, \ell_p, \varepsilon)} = \{S\in\mathcal{L}(\mathfrak{N}), |\langle (S-T)x_i, \ell_j\rangle| < \varepsilon \quad \begin{matrix} i=1 \text{ à } n \\ j=1 \text{ à } p \end{matrix}\}$$

Un filtre d'opérateurs $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{F}}$ converge vers T si pour tout x dans $\mathfrak{N}$ le filtre $\{T_\alpha x\}_{\alpha\in\mathcal{F}}$ converge vers Tx pour la topologie $\sigma(\mathfrak{N},\mathfrak{N}')$. La topologie faible est donc la topologie la plus faible rendant continues les applications $T \to \langle Tx,\ell\rangle$, c'est-à-dire la topologie de dualité $\sigma(\mathcal{L}(\mathfrak{N}),\mathfrak{N}\otimes\mathfrak{N})$.

La topologie $\mathcal{A}$-faible est la topologie la plus faible rendant les applications $T \mapsto a(Tx,y)$ continues, c'est-à-dire la topologie de dualité $\sigma(\mathcal{L}(\mathfrak{N}),\mathfrak{N}\otimes\mathfrak{N}'_L)$ où $\mathfrak{N}'_L$ est l'image par L de $\mathcal{A}\times\mathfrak{N}$ dans $\mathfrak{N}'$.

Après le rappel des définitions des topologies d'opérateurs que nous considèrerons, la théorie des opérateurs dans les espaces de Hilbert nous amène à donner, dans le cas des espaces à accouplements, les définitions suivantes :

1. Définition

Soient R et T deux éléments de $\mathcal{L}(\mathfrak{N})$.

R et T sont dits $\mathcal{A}$-adjoints si pour tout a dans $\mathcal{A}$

$$a(Rx,y) = a(x,Ty) \quad \text{quel que soit } x,y \text{ dans } \mathfrak{N}$$

R est dit $\mathcal{A}$-autoadjoint si pour tout a dans $\mathcal{A}$

$$a(Rx,y) = a(x,Ry) \quad \text{quel que soit } x,y \text{ dans } \mathfrak{N}$$

R est dit positif si pour tout a dans $\mathcal{A}$

$$a(Rx,x) \geq 0 \quad \text{quel que soit } x \text{ dans } \mathfrak{N}$$

R est dit $\mathcal{A}$-isométrique si pour tout a dans $\mathcal{A}$

$$a(Rx,Rx) = a(x,x) \quad \text{quel que soit } x \text{ dans } \mathfrak{N}$$

R est dit unitaire si R est inversible, et si pour tout a dans $\mathcal{A}$

$$a(Rx,y) = a(x,R^{-1}y) \quad \text{quel que soit } x,y \text{ dans } \mathfrak{N}$$

R est dit $\mathcal{A}$-continu si pour tout a dans $\mathcal{A}$, il existe une constante M_a telle que :

$$|a(Rx,x)| \leq M_a a(x,x) \quad \text{quel que soit } x \text{ dans } \mathfrak{N}$$

Il est à remarquer que la continuité n'implique pas la $\mathcal{A}$-continuité et que la réciproque est également fausse.

Les définitions donnent immédiatement les propriétés :

a) si R est inversible et $\mathcal{A}$-autoadjoint alors R est isométrique.

b) si R est positif alors R est $\mathcal{A}$-autoadjoint.

c) si R est unitaire alors R est $\mathcal{A}$-isométrique et $\|R\| = 1$.

d) si R est inversible et $\mathcal{A}$-isométrique alors R est unitaire.

Remarque :

A l'exception de la $\mathcal{A}$-continuité, il suffit de vérifier les définitions sur une partie dont l'enveloppe convexe est dense dans $\mathcal{A}$.

B - GROUPES D'OPERATEURS

Soit G un groupe dont l'opération interne est notée additivement. L'image de G par un homomorphisme injectif dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{N})$ muni de la loi de composition des opérateurs est appelée groupe d'opérateurs.

Notation.

L'homomorphisme est noté U et l'image de G par U dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{N})$, $\{U_t\}_{t\in G}$.

La définition se traduit par les égalités suivantes :

- $U_o = I$
- $U_{t+h} = U_t \circ U_h$
- $U_{-t} = (U_t)^{-1}$ où $(U_t)^{-1}$ est l'inverse de U_t

Un certain nombre de résultats d'analyse harmonique des opérateurs sur un espace de Hilbert se généralisent aux espaces à accouplements. Comme dans cette théorie, nous supposerons que G est un groupe localement compact abélien et que les opérateurs sont unitaires, c'est-à-dire pour tout a dans $\mathcal{A}$,

$$a(U_t x, y) = a(x, U_{-t} y) \quad \text{quel que soit } x, y \text{ dans } \mathfrak{N} .$$

Dans ce chapitre, nous étudions les propriétés de continuité du groupe d'opérateurs et nous donnons un théorème d'isomorphisme sur des espaces Λ, analogue au théorème d'isomorphisme sur des espaces L^2 intervenant dans certaines démonstrations classiques du théorème de STONE [(23), p. 378]. et nous introduisons les différentes applications nécessaires pour les questions abordées aux chapitres IV et V.

1. GROUPES CONTINUS D'OPERATEURS

Lorsque l'homomorphisme U est continu du groupe topologique G dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{N})$ muni de la topologie uniforme (resp. : forte, faible, $\mathfrak{A}$-faible) nous dirons que le groupe d'opérateurs $\{U_t\}_{t\in G}$ est uniformément (resp. : fortement, faiblement, $\mathfrak{A}$-faiblement) continu.

La continuité $\mathfrak{A}$-faible du groupe d'opérateurs équivaut de façon évidente à la continuité des fonctions $t \to a(U_t x,y)$ quel que soit a dans $\mathfrak{A}$, x,y dans $\mathfrak{N}$. Par polarisation des formes hermitiennes a, cette hypothèse est équivalente à la continuité des applications $t \to a(U_t x,x)$ pour a dans $\mathfrak{A}$ et x dans $\mathfrak{N}$.

Pour établir un lien entre ces différentes continuités, il est commode d'introduire les ensembles suivants :

2. ENSEMBLES DE CORRELATION. ENSEMBLES SPECTRAUX

Soit $\{U_t\}_{t\in G}$ un groupe d'opérateurs.

Les fonctions $t \to a(U_t x,y)$ sont appelées fonctions de corrélation de x et y par rapport au groupe $\{U_t\}_{t\in G}$.

L'ensemble $C_{x,y}$ des fonctions de corrélation de x et de y est appelé ensemble de corrélation de x et de y. Pour un groupe unitaire l'ensemble $C_{y,x}$ est l'ensemble des fonctions complexes conjuguées de $C_{x,y}$. Par polarisation des formes hermitiennes, l'étude des fonctions de $C_{x,y}$ se ramène à celle de l'ensemble $C_{x,x}$ (ou C_x) appelé ensemble de corrélation de x.

Les éléments de C_x sont des fonctions définies positives [(24),pp.17-18] si le groupe d'opérateurs $\{U_t\}_{t\in G}$ est unitaire. En effet, pour toute suite finie $\{c_i\}_{i=1}^{i=n}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ et toute suite finie $\{t_i\}_{i=1}^{i=n}$ dans G en posant :

$$y = \sum_{i=1}^{i=n} c_i U_{t_i} x$$

nous avons :

$$\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n,n} c_i \overline{c_j}\, a(U_{t_i-t_j}x,x) = a(y,y) \geq 0$$

La $\mathcal{C}$-continuité du groupe d'opérateurs équivaut à la continuité des fonctions de corrélation. Dans ce cas, les fonctions de C_x sont des transformées de FOURIER-STIELJES [(24), 1.4.3 p.19] de mesures positives sur Γ groupe dual [(24),pp.6-7] de G . Cet ensemble de mesures est appelé ensemble spectral de x et noté S_x .

Dans le cas où le groupe d'opérateurs est $\mathcal{C}$-faiblement continu les éléments des ensembles $C_{x,y}$ sont aussi les transformées de FOURIER-STIELJES de mesures définies sur Γ . Cet ensemble de mesure est noté $S_{x,y}$.

3. EQUIVALENCE DES CONTINUITES POUR UN GROUPE D'OPERATEURS UNITAIRES

Soit $\{U_t\}_{t\in G}$ un groupe d'opérateurs unitaires ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $\{U_t\}_{t\in G}$ est fortement continu

b) pour tout x dans $\mathfrak{N}$, C_x est un ensemble de fonctions bornées et équicontinues en O

c) pour tout x dans $\mathfrak{N}$, C_x est un ensemble de fonctions bornées et uniformément équicontinues.

L'inégalité de SCHWARZ pour tout x dans $\mathcal{C}$, donne :

$$|a(U_t x,x)-a(x,x)| \leq [a(U_t x-x\,,\,U_t x-x)]^{1/2}[a(x,x)]^{1/2} .$$

L'inégalité étant vraie pour tout a , nous obtenons :

$$|a(U_t x,x)-a(x,x)| \leq \|U_t x-x\|\,\|x\|$$

c'est-à-dire, si le groupe est fortement continu l'ensemble de fonctions C_x est borné et équicontinu en O.

Les opérateurs $\{U_t\}_{t\in G}$ sont unitaires donc pour tout t et h dans G nous avons :

$$|a(U_{t+h}x,x)-a(U_hx,x)| \leq \|U_h\||a(U_tx-x,x)| = |a(U_tx-x,x)|$$

L'équicontinuité en O de C_x entraîne l'uniforme équicontinuité.

Il reste à démontrer que l'équicontinuité en zéro de C_x entraîne la continuité forte du groupe $\{U_t\}_{t\in G}$. Evaluons l'expression $a(U_tx-x,U_tx-x)$:

$$\begin{aligned} a(U_tx-x,U_tx-x) &= a(U_tx,U_tx) + a(x,x) - a(U_tx,x) - a(x,U_tx) \\ &= |2a(x,x) - a(U_tx,x) - a(x,U_tx)| \\ &\leq 2|a(U_tx-x,x)| \quad . \end{aligned}$$

Les fonctions $a(U_tx,x)$ étant équicontinues en zéro, nous déduisons de l'inégalité précédente par passage à la borne supérieure pour a dans $\mathcal{A}$ que la fonction $\|U_tx-x\|$ est continue en O, c'est-à-dire, le groupe est fortement continu en zéro. L'uniforme équicontinuité implique de la même façon la continuité forte du groupe $\{U_t\}_{t\in G}$.

Théorème I.

Pour un groupe d'opérateurs unitaires les trois conditions suivantes sont équivalentes.

a) $\{U_t\}_{t\in G}$ est fortement continu

b) $\{U_t\}_{t\in G}$ est faiblement continu

c) $\{U_t\}_{t\in G}$ est $\mathcal{A}$-faiblement continu

D'après la définition des topologies forte, faible et $\mathcal{A}$-faible sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ il est évident qu'il suffit de vérifier c) entraîne a).

La compacité de l'ensemble d'accouplements $\mathcal{A}$ entraîne que les ensembles de corrélation $C_x = \{a(U_tx,x)\ a\in\mathcal{A}\}$ sont compacts pour la topologie ponctuelle sur G.

Supposons que le groupe d'opérateurs soit $\mathcal{A}$-faiblement continu, c'est-à-dire les fonctions de corrélation sont continues. L'ensemble spectral S_x existe quel que soit x dans $\mathfrak{N}$. Le théorème est alors un corollaire du théorème suivant [(21), th. III].

Soit S un ensemble de mesures positives bornées sur Γ ; les conditions suivantes sont équivalentes :

c) l'ensemble S est compact pour la topologie étroite $\sigma(\mathcal{M},\mathcal{C})$

c') l'ensemble $\hat{S}$ est compact dans $\mathcal{C}(G)$ pour la topologie de la convergence compacte

c") l'ensemble $\hat{S}$ est compact dans $\mathcal{C}(G)$ muni de la convergence ponctuelle

c"') l'ensemble $\hat{S}$ est équicontinu à l'origine.

La continuité $\mathcal{A}$-faible du groupe d'opérateurs entraîne que l'ensemble $C_x = \hat{S}_x$ est équicontinu à l'origine, c'est-à-dire le groupe est fortement continu.

La démonstration du théorème donne le résultat suivant : pour un groupe d'opérateurs unitaire $\mathcal{A}$-faiblement continu, les ensembles spectraux S_x sont compacts pour la topologie étroite $\sigma(\mathcal{M},\mathcal{C})$.

La condition de compacité sur G est indispensable pour ce théorème. Les théorèmes obtenus par la suite restent encore vrais si l'ensemble G n'est pas compact ponctuel à condition de considérer un groupe d'opérateurs fortement continu ou de se restreindre au sous-espace sur lequel le groupe est fortement continu.

C - SOUS-ESPACES $\mathcal{V}_x$

Soit $\{U_t\}_{t\in G}$ un groupe d'opérateurs unitaires, $\mathcal{A}$-faiblement (ou fortement) continu.

Notons $\mathcal{V}_x$ le sous-espace fermé, engendré par un élément x de $\mathfrak{N}$ sous l'action du groupe $\{U_t\}_{t\in G}$, c'est-à-dire par les combinaisons

linéaires finies de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_{t_i}$, $t_i \in G$.

Les sous-espaces $\mathcal{V}_x$ sont invariants par rapport au groupe $\{U_t\}_{t\in G}$ et si y appartient à $\mathcal{V}_x$ alors le sous-espace $\mathcal{V}_y$ associé à y est contenu dans $\mathcal{V}_x$.

Les ensembles de corrélation donnent une nouvelle expression pour la norme des élémentsdu sous-espace $\mathcal{V}_x$.

La norme de x s'écrit :

$$\|x\|^2 = \sup_{a\in\mathcal{A}} [a(x,x)] = \sup_{c\in C_x} c(o)$$

La fonction de corrélation c est la transformée de FOURIER-STIELTJES d'une mesure positive de l'ensemble spectral S_x et nous avons :

$$c(t) = \int_\Gamma \langle \gamma, t\rangle ds(\gamma)$$

où $\gamma \to \langle \gamma, t\rangle$ est le caractère du groupe Γ associé à l'élément t de G .

La norme de x vérifie les égalités :

$$\|x\|^2 = \sup_{a\in\mathcal{A}} a(x,x) = \sup_{c\in C_x} c(o) = \sup_{s\in S_x} \int_\Gamma ds \qquad (1)$$

Les éléments y du sous-espace $\mathcal{V}_x$ de la forme $y = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i U_{t_i} x$ pour λ_i dans $\mathbb{C}$, t_i dans G admettent pour ensemble de corrélation :

$$C_y = \{ \sum_{\substack{i=1,n\\ j=1}} \lambda_i \bar{\lambda}_j c(t_i - t_j) \text{ pour } c \text{ dans } C_x \}$$

La relation (1) nous donne comme expression de la norme de y :

$$\|y\|^2 = \sup_{c\in C_x} \sum_{\substack{i=1,n\\ j=1}} \lambda_i \bar{\lambda}_i \, c(t_i - t_j)$$

$$\|y\|^2 = \sup_{s\in S_x} \int_\Gamma \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle \gamma, t_i\rangle \right|^2 ds \qquad (2)$$

La norme de l'élément $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_{t_i} x$ est la même que celle du polynôme trigonométrique $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle \gamma, t_i\rangle$ dans l'espace $\Lambda(S_x)$ introduit au chapitre I. L'ensemble spectral S_x est étroitement compact et d'après le théorème [IV, ch. I], il existe une isométrie du sous-ensemble $\mathcal{V}_x$ dans $\Lambda(S_x)$. Cette isométrie est évidemment linéaire.

Théorème II (d'isomorphisme).

Le sous-espace fermé $\mathcal{V}_x$ engendré par un élément x de $\mathfrak{R}$ sous l'action du groupe $\{U_t\}_{t\in G}$ est isomorphe et isométrique à l'espace $\Lambda(S_x)$ où S_x est l'ensemble spectral associé à x .

L'espace $\Lambda(S_x)$ étant complet, l'isométrie définie sur l'espace des combinaisons linéaires finies de $\{U_t x\}_{t\in G}$ se prolonge par continuité à $\mathcal{V}_x$ de façon isométrique.

L'ensemble spectral est compact pour la topologie étroite $\sigma(\mathcal{M},\mathcal{C})$, donc l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans $\Lambda(S_x)$ c'est-à-dire l'application I_x de $\mathcal{V}_x$ dans $\Lambda(S_x)$ (ou Λ_x) est surjective.

L'application I_x est telle que :

$$x \longrightarrow I_x(x) = 1$$
$$U_t x \longrightarrow \langle \gamma, t\rangle$$
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_{t_i} x \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle \gamma, t_i\rangle$$

Notons τ_t , l'application de G dans $\mathcal{L}(\Lambda_x,\Lambda_x)$ définie par $\tau_t f = \langle \gamma,t\rangle f(\gamma)$ pour tout élément f de Λ_x .

L'ensemble $\{\tau_t\}_{t\in G}$ est évidemment un groupe d'opérateurs unitaires sur Λ_x . Nous obtenons le théorème suivant :

Théorème III.

En restriction au sous-espace $\mathcal{V}_x$, le groupe d'opérateurs $\{U_t\}_{t\in G}$ est représenté sur Λ_x par le groupe des multiplications par les caractères $\{\tau_t\}_{t\in G}$

$$\boxed{U_t = I_x^{-1} \circ \tau_t \circ I_x}$$

Application n_x

L'application canonique $\sim$ de $\mathcal{C}$ dans Λ_x [ch. I] définit une application linéaire continue n_x de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{V}_x$ par :

$$n_x = I_x^{-1} \circ \sim$$

c'est-à-dire pour tout Φ dans $\mathcal{C}$ $\quad n_x(\Phi) = I_x^{-1}(\tilde{\Phi})$

L'isomorphisme entre $\mathcal{V}_x$ et Λ_x nous donne l'inégalité suivante :

$$\|n_x(\Phi)\|^2 = \|\tilde{\Phi}\|_{\Lambda_x}^2 = \sup_{s \in S_x} \int_\Gamma |\tilde{\Phi}|^2 ds \leq \|\Phi\|_\infty^2 \|x\|^2$$

Applications h_Φ et h_x

Soit y un élément de $\mathcal{V}_x$; l'image d'une fonction continue bornée Φ par l'application n_y est un élément de $\mathcal{V}_y$ donc de $\mathcal{V}_x$ et nous avons :

$$I_x(n_y(\Phi)) = I_x(y) \times \tilde{\Phi} \qquad (1)$$

$$\|n_y(\Phi)\| \leq \|\Phi\|_\infty \|y\| \qquad (2)$$

L'égalité (1) définit une application linéaire notée h_Φ de $\mathcal{V}_x$ dans $\mathcal{V}_x$ par :

$$h_\Phi(y) = n_y(\Phi) = I_x^{-1}(I_x(y) \times \tilde{\Phi}) \qquad (3)$$

L'inégalité (2) montre que l'application h_Φ est continue avec $\|h_\Phi\| \leq \|\Phi\|_\infty$.

A toute fonction continue Φ nous avons associé un élément h_Φ de $\mathcal{L}(\mathcal{V}_x, \mathcal{V}_x)$. Nous obtenons ainsi une application linéaire continue h_x de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{V}_x, \mathcal{V}_x)$ avec $\|h_x\| \leq 1$ d'après (2).

L'ensemble G des caractères de Γ peut être considéré comme un sous-ensemble de $\mathcal{C}$. L'application h_x prolonge à $\mathcal{C}$ l'application τ de G dans $\mathcal{L}(\mathcal{V}_x)$.

Propriété IV.

L'application h_x de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{V}_x)$ est un homomorphisme continu d'algèbre.

Démonstration :

L'application n_x étant linéaire, h_x est un homomorphisme d'espace vectoriel.

Soient Φ et ψ deux fonctions de $\mathcal{C}$. L'égalité (3) donne pour tout y dans $\mathcal{V}_x$:

$$h_{\Phi}[h_{\psi}(y)] = I_x^{-1}\{[I_x^{-1}(I_x(y)\times\tilde{\psi})]\times\tilde{\Phi}\}$$

$$h_{\Phi}[h_{\psi}(y)] = I_x^{-1}[I_x(y)\times\tilde{\psi}\times\tilde{\Phi}] = h_{\Phi\psi}(y)$$

L'application h_x vérifie $h_x(\Phi\psi) = h_x(\Phi)\circ h_x(\psi)$, c'est-à-dire h_x est un homomorphisme d'algèbre.

La continuité est donnée par la relation :

$$\|h_x(\Phi)\circ h_x(\psi)\| = \|h_x(\Phi\psi)\| \leq \|\Phi\|_\infty\|\psi\|_\infty$$

D - APPLICATION M

1. DEFINITION

Soient x un élément de $\mathfrak{N}$ et L de $\mathfrak{N}'$. D'après le théorème [ch. II, B.3], L est de la forme $\ell_a(\bar{y})$ où $\bar{y}$ est élément de $\mathfrak{N}_a$. Le groupe d'opérateurs unitaires $\{U_t\}_{t\in G}$ est défini sur une partie dense de $\mathfrak{N}_a$. Il se prolonge de façon évidente en un groupe d'opérateurs unitaires sur $\mathfrak{N}_a$. La fonction $t \to a(U_t x,\bar{y})$ est la transformée de FOURIER-STIELTJES d'une mesure définie sur Γ [ch. IV, B.2].

Notons M <u>l'application de</u> $\mathfrak{N}\times\mathfrak{N}'$ <u>dans</u> $\mathcal{M}$ <u>définie par</u> :

$$M(x,L) = a(U_t x,\bar{y}) \quad \text{avec} \quad L = \ell_a(\bar{y}) .$$

Cette application est linéaire en x et linéaire en L d'après la propriété [ch. II, B.4].

La forme linéaire L en restriction à $\mathcal{V}_x$ est un élément ℓ de $\mathcal{V}'_x$. Le sous-espace $\mathcal{V}_x$ étant isomorphe à Λ_x d'après [th. I, ch. I] le dual $\mathcal{V}'_x$ est isomorphe à $U(S_x)$ ou U_x . Il existe une mesure s de S_x et un élément ρ de $L^2(s)$ tels que $\rho ds = \ell$ c'est-à-dire pour tout t dans G

$$a(U_t x,\bar{y}) = \int_\Gamma \langle\gamma,t\rangle\rho(\gamma)ds(\gamma) \qquad (1)$$

La mesure $M(x,L)$ est donc la mesure ρds . Elle vérifie les inégalités suivantes :

$$\|M(x,L)\|_{\mathcal{M}} = \int_{\Gamma} |\rho(\gamma)| ds(\gamma) \leq \|\rho\|_{L^2(s)} \|s\|$$

$$\|M(x,L)\|_{\mathcal{M}} \leq \|L\| \, \|x\| \qquad (2)$$

Cette inégalité implique que l'application <u>bilinéaire</u> M est continue. L'égalité (1) donne pour tout y dans $\mathcal{V}_x$ de la forme $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_{t_i} x$

$$M(y,L) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle \gamma, t_i \rangle M(x,L) \qquad (3)$$

L'ensemble des polynômes $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_{t_i} x$ est dense dans $\mathcal{V}_x$. Par passage à la limite nous obtenons pour tout y dans $\mathcal{V}_x$

$$M(y,L) = I_x(y) M(x,L) \qquad (4)$$

<u>Notons</u> $\mathcal{M}_{\mathfrak{N} \times \mathfrak{N}'}$ <u>l'image de</u> $\mathfrak{N} \times \mathfrak{N}'$ <u>par</u> M . D'après l'égalité (4) et compte-tenu de l'application n_x nous avons la propriété suivante :

<u>Propriété V.</u>

<u>Si</u> μ <u>est un élément de</u> $\mathcal{M}_{\mathfrak{N} \times \mathfrak{N}'}$ <u>alors pour tout</u> f <u>dans</u> $\mathcal{C}$ $f d\mu$ <u>appartient à</u> $\mathcal{M}_{\mathfrak{N} \times \mathfrak{N}'}$.

<u>Remarque.</u>

Soit L un élément de la forme $L(a,y)$. L'image par M du couple (x,L) est la transformée de FOURIER-STIELTJES de la fonction de corrélation $a(U_t x, y)$ et nous avons :

$$M(x,y,a) = M(x,L(a,y)) = \overline{M(y,x,a)} \qquad (5)$$

<u>Remarque.</u>

Pour x fixé (resp. L fixé) l'application M_x (resp. M_L) définie par $M_x(L) = M(x,L)$ est continue pour les topologies $\sigma(\mathfrak{N}', \mathfrak{N})$ et $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{C})$ (resp. : $\sigma(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}')$ et $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{C})$).

2. PRODUIT TENSORIEL $\mathfrak{N} \otimes \mathfrak{N}'$

Le produit tensoriel $\mathfrak{N} \otimes \mathfrak{N}'$ est le dual topologique de l'espace des opérateurs $\mathfrak{L}(\mathfrak{N})$ pour la topologie forte (ou faible) d'opérateurs [

Soit T un élément de $\mathfrak{L}(\mathfrak{N})$. L'opérateur T définit une forme linéaire sur $\mathfrak{N} \otimes \mathfrak{N}'$ par :

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes L_i \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \langle Tx_i, L_i \rangle$$

En particulier, le groupe d'opérateurs $\{U_t\}_{t \in G}$ associe au tenseur $\theta = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes L_i$ la fonction continue $\sum_{i=1}^{n} \langle U_t x_i, L_i \rangle$. Nous obtenons une application encore notée M de $\mathfrak{N} \otimes \mathfrak{N}'$ dans $\mathcal{M}$ définie par

$$\widehat{M(\theta)} = \sum_{i=1}^{n} \langle U_t x_i, L_i \rangle$$

où $\widehat{M(\theta)}$ est la transformée de FOURIER-STIELTJES de $M(\theta)$.

Nous pouvons remarquer que pour un tenseur $\theta = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes L_i$ la mesure $M(\theta)$ peut s'écrire :

$$M(\theta) = \sum_{i=1}^{n} M(x_i, L_i) \ .$$

Notons $\mathcal{M}_{\mathfrak{N}}$ l'image de $\mathfrak{N} \otimes \mathfrak{N}'$ par l'application linéaire M . Il est immédiat de vérifier que $\mathcal{M}_{\mathfrak{N}}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$ engendré par l'ensemble $\mathcal{M}_{\mathfrak{N} \times \mathfrak{N}'}$, image de $\mathfrak{N} \times \mathfrak{N}'$ par l'application M .

L'application bilinéaire M est continue de $\mathfrak{N} \times \mathfrak{N}'$ dans $\mathcal{M}$ c'est-à-dire d'après (2) :

$$\|M(x,L)\|_{\mathcal{M}} \leq \|x\| \ \|L\|$$

Pour un tenseur $\theta = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes L_i$ nous obtenons :

$$\|M(\theta)\|_{\mathcal{M}} \leq \Big\| \sum_{i=1}^{n} M(x_i, L_i) \Big\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \ \|L_i\|$$

L'application linéaire M de $\mathfrak{N} \otimes \mathfrak{N}'$ dans $\mathcal{M}$ est continue pour la π-norme sur $\mathfrak{N} \otimes \mathfrak{N}'$, c'est-à-dire $\|\theta\|_{\pi} = \inf_{\theta = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes L_i} \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \ \|L_i\| \right)$.

3. CAS DES ESPACES DE HILBERT

Dans le cas des espaces de Hilbert, le théorème de Stone [(23), p. 378] pour un groupe $\{U_t\}_{t\in G}$ d'opérateurs unitaires faiblement continu de $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{H}$ nous assure l'existence d'une mesure spectrale E définie sur les boréliens de Γ telle que :

$$U_t = \int_\Gamma \langle \gamma, t\rangle E(d\gamma) \qquad (1)$$

L'ensemble spectral associé à x est alors réduit à la mesure positive $\mu_x = \langle Ex, x\rangle$. Le sous-espace cyclique $\mathcal{V}_x$ engendré par x sous l'action du groupe $\{U_t\}_{t\in G}$ est isomorphe et isométrique à l'espace de Hilbert $L^2(\mu_x)$ et nous avons

$$\widehat{\mu_n(t)} = \langle U_t x, x\rangle$$

La relation (1) donne dans ce cas une expression simple de l'application M de $\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H}$ dans $\mathcal{M}_{\mathfrak{H}}$. Soit $\theta = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ un tenseur de $\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H}$, nous avons :

$$M(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \langle Ex_i, y_i\rangle \qquad (2)$$

où E est la mesure spectrale associée au groupe $\{U_t\}_{t\in G}$. Dans ce cas nous avons la propriété suivante :

Propriété VI.

Toute mesure de $\mathcal{M}_{\mathfrak{H}}$ est l'image par M d'un tenseur simple, c'est-à-dire, soit $\theta = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$, il existe u et v dans $\mathfrak{H}$ tels que $M(\theta) = M(u\otimes v)$.

Il suffit de démontrer le résultat pour un tenseur de la forme : $\theta = x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2$.

Notons P la projection orthogonale sur le sous-espace $\mathcal{V}_{x_1}$ et Q l'opérateur $I - P$. Pour tout t dans G , l'élément $U_t x_1$ appartient à $\mathcal{V}_{x_1}$; nous avons

$$\langle U_t x_1, y_1\rangle = \langle U_t x_1, Py_1\rangle$$

La transformation de FOURIER-STIELTJES donne :

$$\widehat{M(x_1 \otimes y_1)} = \widehat{M(x_1 \otimes Py_1)} \ .$$

L'élément Py_1 appartient au sous-espace $\mathcal{V}_{x_1}$; l'isométrie I_{x_1} de $\mathcal{V}_{x_1}$ dans $L^2(\mu_x)$ permet d'écrire la mesure $M(x_1 \otimes y_1)$ sous la forme :

$$M(x_1 \otimes y_1) = \overline{I_{x_1}(Py_1)}\, M(x_1 \otimes x_1) \ .$$

De la même façon si z_1 et z_2 sont deux éléments de sous-espace $\mathcal{V}_{x_1}$ nous obtenons :

$$M(z_1 \otimes z_2) = I_{x_1}(z_1)\overline{I_{x_1}(z_2)}M(x_1 \otimes x_1) \qquad (3)$$

Les éléments x_2 et y_2 se décomposent en $x_2 = Px_2 + Qx_2$ et $y_2 = Py_2 + Qy_2$ avec Qy_2 orthogonal à Py_2 et Px_2 à Qy_2 . La mesure $M(x_2 \otimes y_2)$ s'écrit comme la somme des mesures $M(Px_2 \otimes Py_2)$ et $M(Q\,x_2 \otimes Qy_2)$. La relation (3) appliquée à $M(Px_2 \otimes Py_2)$ donne :

$$M(x_2 \otimes y_2) = I_{x_1}(Px_2)\overline{I_{x_1}(Py_2)}M(x_1 \otimes x_1) + M(Qx_2 \otimes Qy_2) \ .$$

La fonction $\Phi = I_{x_1}(Px_2)\overline{I_{x_1}(Py_2)} + \overline{I_{x_1}(Py_1)}$ est un élément de $L^1(\mu_{x_1})$. Il existe deux fonctions f et g de $L^2(\mu_{x_1})$ telles que $\Phi = f\bar{g}$. En posant $u = (I_{x_1}^{-1}(f)+Qx_2)$ et $v = (I_{x_1}^{-1}(g)+Qy_2)$ nous obtenons :

$$M(u \otimes v) = f\bar{g}\, M(x_1 \otimes x_1) + M(Qx_2 \otimes Qy_2)$$

c'est-à-dire $M(u \otimes v) = M(\theta)$.

CHAPITRE IV

CARACTERISATION DES OPERATEURS SUBORDINATIFS

A - OPERATEURS SUBORDINATIFS

1. OPERATEUR H_Φ

Soit Φ une fonction continue bornée sur Γ. La fonctionnelle linéaire de $\mathfrak{N}'$ dans $\mathbb{C}$ définiepar

$$L \to \langle \Phi, M_x(L) \rangle = \int \Phi dM(x,L)$$

est continue pour la topologie $\sigma(\mathfrak{N}', \mathfrak{N})$ d'après la remarque 2 [ch. III, § D], c'est-à-dire, elle est associée à un élément de $\mathfrak{N}$ noté $H_\Phi(x)$. La propriété V du chapitre III donne les égalités suivantes :

$$H_\Phi(x) = h_\Phi(x) = n_x(\Phi)$$

L'opérateur H_Φ associé à la fonction continue Φ, en restriction au sous-espace $\mathscr{V}_x$ coïncide avec h_Φ. Cela implique que pour tout x dans $\mathfrak{N}$, $H_\Phi(x)$ appartient à $\mathscr{V}_x$ et que l'opérateur H_Φ est continu avec $\|H_\Phi\| \leq \|\Phi\|_\infty$.

De la propriété IV [ch. III], nous déduisons immédiatement les relations :

$$H_\Phi \circ H_\psi = H_{\Phi \times \psi}$$

$$\|H_\Phi \circ H_\psi\| \leq \|\Phi\|_\infty \|\psi\|_\infty$$

Ces propriétés donnent le résultat suivant :

Théorème I.

L'application H de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{L}(\mathfrak{N})$ qui à Φ associe l'opérateur H_Φ est un homomorphisme d'algèbre.

En général, cet homomorphisme n'est pas une isométrie.

L'ensemble G des caractères du groupe Γ est une partie de $\mathcal{C}$. A la fonction $\gamma \to \langle \gamma, t \rangle$ l'homomorphisme H associe l'opérateur $H_t = U_t$. La restriction de H à G est identique à l'application U de G dans $\mathcal{L}(\mathfrak{N})$ définie en [ch. III, § B]

La multiplication dans $\mathcal{C}$ est commutative et nous obtenons $H_\varphi \circ H_\psi = H_\psi \circ H_\varphi$; en particulier les opérateurs H_Φ commutent avec tous les éléments du groupe $\{U_t\}_{t \in G}$.

Les propriétés des opérateurs H_Φ nous amènent à donner les définitions suivantes :

2. OPERATEURS SUBORDINATIFS

Définition :

Un opérateur T de $\mathfrak{N}$ dans $\mathfrak{N}$ est dit :

a) t-invariant s'il commute avec tous les opérateurs U_t

$$U_t \circ T = T \circ U_t$$

b) subordinatif si pour tout x dans $\mathfrak{N}$

Tx appartient à $\mathcal{V}_x$.

L'opérateur H_Φ associé à la fonction continue bornée Φ est t-invariant et subordinatif. Le problème inverse se pose. Etant donné T un opérateur subordinatif continu, est-il de la forme H_Φ ? Sinon est-il t-invariant ? Un opérateur t-invariant est-il subordinatif ?

La réponse à la dernière question est évidemment non.

Dans le cas des espaces de Hilbert [(17), p. 550] et des espaces $\mathfrak{N}_{r,c}$ [(4), prop. 4] , les opérateurs subordinatifs sont t-invariants.

La démonstration donnée dans [(4), prop. 4] pour les espaces $\mathfrak{N}_{r,c}$ peut s'adapter à notre cas plus général ; nous allons en donner une autre démonstration.

La correspondance entre le groupe $\{U_t\}_{t\in G}$ restreint au sous-espace $\mathcal{V}_x$ et le groupe des multiplications par les caractères dans les espaces Λ_x donne pour un opérateur subordinatif la propriété suivante :

Propriété II.

Soit T un opérateur subordinatif. La restriction T_x de T au sous-espace $\mathcal{V}_x$ est telle que l'opérateur $\mathcal{T}_x = I_x \circ T_x \circ I_x^{-1}$ de Λ_x dans Λ_x possède la propriété :

(P) Soient f et g deux éléments de Λ_x et soit E un borélien de Γ ; si $f_{|E} = g_{|E}$ alors $(\mathcal{T}_x f)_{|E} = (\mathcal{T}_x f)_{|E}$.

Démonstration :

Soient f et g deux éléments de Λ_x et E un borélien de Γ tel que $f_{|E} = g_{|E}$. Notons y et z les éléments de $\mathcal{V}_x$ tels que $f = I_x(y)$ et $g = I_x(z)$.

L'opérateur T étant subordinatif T(y-z) appartient au sous-espace $\mathcal{V}_{y-z}$. Comme $f - g = 0$ sur E , l'image de $\mathcal{V}_{y-z}$ par I_x est contenue dans l'ensemble des éléments de Λ_x qui s'annulent sur E ce qui entraîne $\mathcal{T}_x(f-g) = 0$ sur E c'est-à-dire :

$$(\mathcal{T}_x f)_{|E} = (\mathcal{T}_x g)_{|E}$$

En composant l'opérateur $\mathcal{T}_x$ de Λ_x dans Λ_x avec l'application canonique $\sim$ de $\mathcal{C}$ dans Λ_x nous obtenons une application de $\mathcal{C}$ dans $\cap(S_x)$ vérifiant (P).

Soient X un espace localement compact et S un ensemble de mesures positives sur X , convexe et étroitement compact.

Lemme III.

Soit T une application linéaire continue de $\mathcal{C}$ dans $\cap(S)$ telle que :

i) $T(1) = 0$

ii) Pour tout borélien E de X et f,g dans $\mathcal{C}$, telles que $f_{|E} = g_{|E}$ alors $(Tf)_{|E} = (Tg)_{|E}$ S-presque partout

alors T est l'application identiquement nulle.

Démonstration :

D'après (i), il suffit de démontrer le lemme pour les fonctions continues, réelles positives et à support compact.

Soient E un borélien de X et f une fonction continue bornée, constante sur E ; d'après i) et ii) nous avons $(Tf)_{|E} = 0$. La démonstration est basée sur cette remarque ; nous allons approcher uniformément les fonctions continues par des fonctions localement constantes.

Soient f une fonction positive, continue à support compact K et $M = \|f\|_\infty$.

Posons $I_{p,n} = f^{-1}[\frac{p}{n} M , \frac{(p+1)M}{n}] \cap K$.

Puisque f est continue les ensembles $I_{p,n}$ sont compacts.

Notons $E_n = \bigcup_{2p \leq n} I_{2p,n}$ et $E'_n = \bigcup_{2p+1 \leq n} I_{2p+1,n}$.

Ces deux ensembles sont des compacts contenus dans K .

Soit k_n la fonction nulle à l'extérieur de E_n , égale à $\frac{2p+1}{2n} \times M$ sur $I_{p,n}$ p pair.

Soit k'_n la fonction nulle à l'extérieur de E'_n , égale à $\frac{2p+1}{2n} \times M$ sur $I_{p,n}$ p impair.

Ces deux fonctions sont bien définies puisque les ensembles $I_{p,n}$ et $I_{p',n}$ sont disjoints si p et p' sont de même parité.

La fonction $f_{|E_n} - k_n$ est continue de E_n dans $\mathbb{C}$ et de norme uniforme majorée par M/n . Le théorème de TIETZE-URYSOHN [(7), § 5, n° 7]

nous assure l'existence d'une fonction continue h_n , définie sur X avec :

$$\|h_n\|_\infty \leq \frac{M}{n}$$

$$h_n|_{E_n} = k_n = f|_{E_n} - k_n$$

Nous prolongeons de la même façon $f|_{E'_n} - k'_n$ par une fonction continue h'_n avec

$$\|h'_n\|_\infty \leq \frac{M}{n}$$

$$h'_n|_{E'_n} = f|_{E'_n} - k'_n$$

Sur l'ensemble $I_{2p,n}$, la fonction h_n coïncide avec $f - M\chi(\frac{4p+1}{2n})$ c'est-à-dire nous avons $(Th_n)|_{I_{2p,n}} = (Tf)|_{I_{2p,n}}$.

Sur l'ensemble $E_n = \bigcup_{2p\leq n} I_{2p,n}$ nous obtenons

$$(Th_n)|_{E_n} = (Tf)|_{E_n} \qquad (1)$$

De même la fonction h'_n vérifie l'égalité

$$(Th'_n)|_{E'_n} = (Tf)|_{E'_n} \qquad (2)$$

Pour calculer $\|Tf\|$, évaluons la norme de Tf dans les espaces $L^2(s)$ pour $s \in S$:

$$(\int_X |Tf|^2 ds)^{1/2} = (\int_K |Tf|^2 ds)^{1/2} \leq (\int_{E_n} |Tf|^2 ds)^{1/2} + (\int_{E'_n} |Tf|^2 ds)^{1/2}$$

En utilisant les égalités (1) et (2) nous avons :

$$\|Tf\|_{L^2(s)} \leq (\int_{E_n} |Th_n|^2 ds)^{1/2} + (\int_{E'_n} |Th'_n|^2 ds)^{1/2} \leq \|Th_n\|_{L^2(s)} + \|Th'_n\|_{L^2(s)}$$

L'inégalité est vraie quel que soit s dans S ; par passage à la borne supérieure sur S nous obtenons l'inégalité pour la norme dans $\cap(S)$. La continuité de l'application linéaire T donne :

$$\|Tf\| \leq \|T\|(\|h_n\|_\infty + \|h'_n\|_\infty) \leq \|T\|\frac{2M}{n} \quad .$$

La relation est vérifiée quel que soit n donc $\|Tf\| = 0$ pour tout f dans $\mathcal{C}$ c'est-à-dire T est l'application identiquement nulle.

Soit S un ensemble de mesures définies sur Γ vérifiant les hypothèses du lemme III.

Lemme IV.

Soit T un opérateur continu de $\Lambda(S)$ dans $\cap(S)$ tel que pour tout borélien E de Γ, si $f_{|E} = g_{|E}$ S-presque partout alors :

i) il existe une fonction φ tel que $Tf = \varphi \cdot f$

ii) T commute avec les opérateurs multiplication par un caractère.

Démonstration :

Notons $\tilde{T}$ l'application composée $T \circ \sim$ de $\mathcal{C}(\Gamma)$ dans $\cap(S)$. Cette application est linéaire et continue pour les normes avec $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$.

Soit φ une fonction représentant la classe d'équivalence de $T(1)$ dans $\cap(S)$. Si f est un élément de $\mathcal{C}(\Gamma)$ alors $\varphi \cdot f$ vérifie

$$\left[\int_\Gamma |\varphi . f|^2 ds\right]^{1/2} \leq \|f\|_\infty \left(\int_\Gamma |\varphi|^2 ds\right)^{1/2} \qquad (1)$$

c'est-à-dire φf est un élément de $\cap(S)$ avec $\|\varphi f\|_{\cap(S)} \leq \|f\|_\infty \|\varphi\|_{\cap(S)}$. L'application $\tilde{T}_\varphi$ de $\mathcal{C}$ dans $\cap(S) : f \to \tilde{T}_\varphi f = \varphi \tilde{f}$ est linéaire et continue telle que $\|\tilde{T}_\varphi\| \leq \|\varphi\|_{\cap(S)}$. L'application $\tilde{T} - \tilde{T}_\varphi$ vérifie de façon évidente les hypothèses du lemme III, donc nous avons :

$$\tilde{T} = \tilde{T}_\varphi$$

Soit g un élément de $\Lambda(S)$; g est limite d'une suite de classes d'équivalences $\{\tilde{g}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ où g_n sont des fonctions continues.

Donc, en utilisant la continuité de $\tilde{T}$ nous avons dans l'espace $\cap(S)$:

$$Tg = \lim_{n \to \infty} T\tilde{g}_n = \lim_{n \to \infty} \tilde{T}g_n = \lim_{n \to \infty} \varphi . \tilde{g}_n \qquad (2)$$

Les espaces de Banach $\bigcap_{(S)} L^p$ (ou $\cap^p$) [(3), § A, n° 1] vérifient

les inclusions :

$$\bigcap_{(S)} L^q \subset \cap(S) \subset \bigcap_{(S)} L^p \qquad p \leq 2 \ , \ q \geq 2$$

avec l'inégalité des normes pour un élément f de $\bigcap_{(S)} L^q$

$$\|f\|_{\cap^p} \leq \|f\|_{\cap^q}$$

Les éléments g et φ sont dans $\cap(S)$, donc le produit $\varphi \cdot g$ est dans l'espace $\cap^1$ et l'inégalité de SCHWARZ donne :

$$\int |\varphi g| ds \leq [\int |\varphi|^2 ds]^{1/2} [\int |g|^2 ds]^{1/2} \qquad (3)$$

$$\|\varphi g\|_{\cap^1} \leq \|\varphi\|_{\cap} \|g\|_{\cap} \qquad (4)$$

En appliquant l'inégalité (4) aux éléments φ et $g - \tilde{g}_n$ nous obtenons :

$$\|\varphi(g-\tilde{g}_n)\|_{\cap^1} \leq \|\varphi\|_{\cap} \|g-\tilde{g}_n\|_{\cap}$$

La suite $\varphi\tilde{g}_n$ est donc convergente vers φg dans l'espace $\cap^1$ et vers Tg (2) dans $\cap^2$. L'inclusion $\cap^2 \subset \cap^1$ entraîne que la suite $\varphi \cdot \tilde{g}_n$ converge vers Tg dans $\cap^1$ et d'après l'unicité des limites, nous déduisons que $Tg = \varphi \cdot g$ S-presque partout, c'est-à-dire dans $\cap$.

Notons τ_t l'opérateur multiplication par le caractère $t \to \langle \gamma, t \rangle$, de $\Lambda(S)$ dans $\cap(S)$ nous avons :

$$T \circ \tau_t(g) = T(\langle \gamma, t \rangle g) = \varphi . \langle \gamma, t \rangle . g = \langle \gamma, t \rangle \varphi . g = (\tau_t \circ T)g$$

c'est-à-dire $T \circ \tau_t = \tau_t \circ T$

Le lemme est ainsi démontré et nous pouvons énoncer le théorème attendu :

Théorème V.

Tout opérateur T subordinatif continu est t-invariant et pour tout x dans $\mathfrak{N}$, il existe une fonction φ_x bornée S_x-presque partout telle que la restriction T_x de T à $\mathcal{V}_x$ vérifie : pour tout y dans $\mathcal{V}_x$

$$\boxed{T_x(y) = I_x^{-1} [\varphi_x \times I_x(y)]}$$

L'opérateur $\mathcal{T}_x$ de Λ_x dans Λ_x associé à T et à x vérifie le lemme IV. Il commute avec les opérateurs τ_t ce qui implique que T est t-invariant.

L'existence de φ_x est donnée par le lemme IV, et nous avons :

$$I_x(Tx) = \mathcal{T}_x(1) = \varphi_x$$

L'élément Tx est dans l'espace $\mathcal{V}_x$ et comme $\mathcal{V}_{Tx} \subset \mathcal{V}_x$ nous avons $T^n x$ appartient à $\mathcal{V}_x$ pour tout entier positif n . L'élément $I_x(T^n x)$ vérifie dans l'espace Λ_x $I_x(T^n x) = \mathcal{T}_x^n(1) = \varphi_x^n$. Dans les espaces $L^2(s)$ où s est une mesure de l'ensemble spectral S_x associé à x nous avons :

$$\int_\Gamma |\varphi_x^n|^2 ds \leq \|T\|^{2n} \|x\|$$

c'est-à-dire $\|\varphi_x\|_{L^{2n}(s)} \leq \|T\| \, \|x\|^{\frac{1}{2n}}$.

Les propriétés des normes dans les espaces L^p [(6), 4 p. 215] donnent $\|\varphi_x\|_{L^\infty(s)} \leq \|T\|$ pour tout s dans S_x , c'est-à-dire la fonction φ_x est bornée S_x-presque partout.

Propriété VI.

L'homomorphisme h [ch. III] de $\mathbb{C}$ dans $\mathfrak{L}(\mathcal{V}_x)$ se prolonge aux fonctions de Λ_x , bornées S_x-presque partout. Un opérateur subordinatif T restreint à $\mathcal{V}_x$ est associé à l'opérateur h_{φ_x} de Λ_x dans Λ_x où φ_x est la fonction $\varphi_x = (I_x \circ T)(x)$.

La deuxième partie de la propriété est la traduction du théorème V. Soit φ une fonction de Λ_x , bornée S_x-presque partout par M . Pour tout élément f de Λ_x nous avons :

$$\sup_{s \in S_x} \left[\int_\Gamma |\varphi f|^2 ds\right]^{1/2} \leq M \sup_{s \in S_x} \left[\int_\Gamma |f|^2 ds\right]^{1/2}$$

c'est-à-dire $\varphi \cdot f$ est un élément de $\cap(S_x)$. A la fonction φ est associée une application linéaire continue $\mathcal{T}_\varphi$ de Λ_x dans $\cap(S_x)$ avec $\|\mathcal{T}_\varphi\| \leq \sup_{s \in S_x} \|\varphi\|_{L^\infty(s)}$. Il nous suffit de démontrer que $\varphi \cdot f$ est un élément

de Λ_x pour tout f dans Λ_x .

Soit f un élément de $\mathcal{C}$, et soit $\{\varphi_n\}$ une suite de fonctions continues bornées telle que la suite $\{\tilde{\varphi}_n\}$ converge vers φ dans Λ_x . Nous avons :

$$\|\varphi f - \tilde{\varphi}_n \tilde{f}\|_{\cap(S_x)} \leq \|f\|_\infty \|\varphi - \varphi_n\|_{\cap(S)} \ .$$

L'élément $\varphi \cdot f$ est limite dans $\cap(S)$ d'une suite $\{\tilde{\varphi}_n \tilde{f}\}$ où les fonctions $\varphi_n f$ sont continues, donc φf est dans Λ_x . Soit f un élément de Λ_x ; il existe une suite de fonctions continues f_n telle que la suite $\{\tilde{f}_n\}$ converge vers f dans Λ_x ; nous avons :

$$\|\varphi f - \varphi \tilde{f}_n\|_{\cap(S)} \leq \sup_{s \in S_x} \|\varphi\|_{L^\infty(s)} \cdot \|f - \tilde{f}_n\|_{\cap(S)}$$

c'est-à-dire φf est limite d'éléments de Λ_x , donc φf appartient à Λ_x .

Posons $h_\varphi = I_x^{-1} \circ \mathcal{T}_\varphi \circ I_x$. L'application h vérifie, $h_\varphi \circ h_\psi = h_{\varphi \times \psi}$ et $\|h_\varphi\| \leq \sup_{s \in S_x} \|\varphi\|_{L^\infty(s)}$, c'est-à-dire h est un homomorphisme d'algèbre.

Soit φ un élément de Λ_x tel que $\sup_{s \in S_x} \|\varphi\|_{L^\infty(S)} < \infty$. La fonction complexe conjuguée $\bar{\varphi}$ de φ est encore dans l'espace Λ_x et $\sup_{s \in S_x} \|\bar{\varphi}\|_{L^\infty(S)} = \sup_{s \in S_x} \|\varphi\|_{L^\infty(s)}$. Il n'est pas difficile de vérifier que les opérateurs h_φ et $h_{\bar{\varphi}}$ sont $\mathcal{A}$-autoadjoints sur $(\mathcal{V}_x, \mathcal{A})$.

Propriété VII.

Soit T un opérateur subordinatif continu et soit y un élément de $\mathcal{V}_x$. Pour toute forme linéaire L dans $\mathfrak{N}'$, nous avons :

$$\boxed{M(Ty, L) = I_x(Tx) \times I_x(y) M(x, L)}$$

Puisque Ty est un élément de $\mathcal{V}_x$ l'égalité (4) [ch.III, D.1] donne les relations

$$M(Ty, L) = I_x(Ty) M(x, L)$$

La propriété VI implique que $I_x(Ty) = h_{\varphi_x}(y) = I_x(Tx).I_x(y)$, c'est-à-dire nous obtenons

$$M(Ty,L) = I_x(Tx) \times I_x(y)M(x,L) = I_x(Tx)M(y,L) \ .$$

En appliquant la propriété pour y , quel que soit L dans $\mathfrak{N}'$ $M(Ty,L) = I_x(Tx)M(y,L) = I_y(Ty)M(y,L)$; c'est-à-dire les fonctions $I_x(Tx)$ et $I_y(Ty)$ sont égales S_y-presque partout.

B - OPERATEURS SUBORDINATIFS DANS LES ESPACES DE HILBERT

L'étude des opérateurs subordinatifs dans les espaces de Hilbert est faite par MASANI dans [(17) th. 1-1]. Nous allons donner les résultats obtenus pour les opérateurs subordinatifs continus.

Soient $\mathfrak{H}$ un espace de Hilbert et $\{U_t\}_{t\in G}$ un groupe d'opérateurs unitaires fortement (ou faiblement) continu. Soit E la mesure spectrale définie sur la famille des boréliens $\mathfrak{B}$ de Γ, associée au groupe $\{U_t\}_{t\in G}$ par le théorème de STONE [(23),p.378] telle que

$$U_t = \int_\Gamma \langle \gamma, t\rangle E(d\gamma)$$

Théorème.

1) Tout opérateur subordinatif continu est t-invariant.

2) Si mult $E \leq \aleph_o$ (ou $\mathfrak{H}$ séparable) alors il existe une fonction borélienne bornée Φ définie sur Γ telle que :

i) $T = \int_\Gamma \Phi(\gamma)E(d\gamma)$

ii) Φ est unique aux ensembles E-nuls près

iii) $\|\Phi\|_\infty = \|T\|$

Les méthodes utilisées pour la démonstration de ce théorème ne s'appliquent pas aux espaces à accouplements. Nous allons donner une généralisation possible de la partie 2) aux espaces de Hilbert quelconques. Nous

utiliserons pour la démonstration les applications et les notations introduites pour les espaces à accouplements.

Remarque :

Soit x un élément de $\mathfrak{H}$; notons P la projection orthogonale sur le sous-espace $\mathcal{V}_x$. Soit T un opérateur subordinatif ; quel que soit v dans $\mathfrak{H}$ nous avons :

$$\langle TPu,v\rangle = \langle TPu,Pv\rangle = \langle Pu,T^*Pv\rangle \ .$$

L'opérateur T étant subordinatif, l'opérateur T^* est subordinatif ; Pu est un élément de $\mathcal{V}_x$, donc T^*Pu appartient à $\mathcal{V}_x$ et nous obtenons :

$$\langle TPu,v\rangle = \langle u,T^*Pv\rangle = \langle PTu,v\rangle$$

L'égalité est réalisée quel que soit u,v dans $\mathfrak{H}$, c'est-à-dire les opérateurs T et P commutent.

Théorème VIII.

Soit T un opérateur subordinatif continu de $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{H}$, alors il existe un élément m' de $\mathcal{M}'$, dual fort de l'espace de Banach $\mathcal{M}$ des mesures sur Γ tel que :

$$\langle Tx,y\rangle = (m',M(x,y))$$

quel que soit x,y dans $\mathfrak{H}$.

La mesure $M(x,y)$ est donnée par $M(x,y) = \langle Ex,y\rangle$ d'après la relation (2) [ch. III, D.3]. Le théorème précédent peut s'exprimer de façon équivalente en utilisant la notation que nous avons adoptée par la relation :

$$\langle Tx,y\rangle = (\Phi,M(x,y)) = \int_\Gamma \Phi\, M(x,y) \ .$$

L'expression $\langle U_t x,y\rangle$ est la transformée de FOURIER-STIELTJES de la mesure $M(x,y)$; nous avons l'égalité :

$$\langle Tx,y\rangle = \int_\Gamma M(Tx,y)$$

quel que soit x,y dans $\mathfrak{H}$.

Démontrons que l'opérateur subordinatif continu T définit une forme linéaire continue m'_T de $\mathcal{M}_{\mathfrak{S}}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$M(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i) \longrightarrow \int_\Gamma M(\sum_{i=1}^{n} Tx_i \otimes y_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle Tx_i, y_i \rangle$$

Soient $\theta_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$, $\theta_2 = \sum_{j=1}^{p} u_j \otimes v_j$ deux tenseurs de $\mathfrak{S} \otimes \mathfrak{S}$.

L'application m'_T est définie si l'égalité $M(\theta_1) = M(\theta_2)$ implique $\sum_{i=1}^{n} \langle Tx_i, y_i \rangle = \sum_{j=1}^{p} \langle Tu_j, v_j \rangle$. D'après la propriété VI [ch. III, D.3] et la linéarité de l'application M nous pouvons nous restreindre à deux tenseurs θ_1 et θ_2 de la forme $\theta_1 = x \otimes y$, $\theta_2 = u \otimes v$ tels que $M(\theta_1) = M(\theta_2)$.

Notons P la projection orthogonale sur le sous-espace $\mathcal{V}_x$ et Q l'opérateur $Q = I-P$. L'opérateur T commute avec P, donc avec Q . Nous obtenons :

$$\langle Tu, v \rangle = \langle TPu, Pv \rangle + \langle TQu, Qv \rangle$$

$$\langle Tx, y \rangle = \langle Tx, Py \rangle$$

Les éléments x, Py, Pu, Pv sont dans $\mathcal{V}_x$; d'après la construction de la propriété VI [ch. III, D.3] il existe r, w appartenant à $\mathcal{V}_x$ telsque :

$$M\langle x \otimes Py - Pu \otimes Pv \rangle = M\langle r \otimes w \rangle \qquad (1)$$

Nous obtenons immédiatement :

$$M\langle Tx \otimes Py - TPu \otimes Pu \rangle = M\langle Tr \otimes w \rangle \qquad (2)$$

Les éléments r et w appartiennent à $\mathcal{V}_x$ donc nous avons :

$$M(r-Qu\ ,\ w-Qv) = M(r,w) - M(Qu,Qv) \qquad (3)$$

Qv et TQu sont orthogonaux au sous-espace $\mathcal{V}_x$, c'est-à-dire :

$$\langle T(r-Qu), w-Qv \rangle = \langle Tr, w \rangle - \langle TQu, Qv \rangle \qquad (4)$$

D'après la propriété VII, nous avons :

$$M(T(r-Qu)\ ,\ w-Qv) = \Phi_{(r-Qu)}\, M(r-Qu, w-Qv) \qquad (5)$$

En intégrant les mesures de la relation (5) et en utilisant les équivalences obtenues en (1), (2), (3) nous obtenons :

$$\int (M(Tx,y)-M(Tu,v)) = \int_{\Gamma} \Phi_{r-Qu}(M(x,y)-M(u,v)) \ .$$

La mesure $M(x,y) - M(u,v)$ est nulle par hypothèse, donc $\int M(Tx,y) = \int M(Tu,v)$.

L'application m'_T est linéaire d'après la linéarité de M . La continuité de m'_T est donnée par l'inégalité suivante :

$$|(m'_T, M(x\otimes y))| = |\int \Phi_x M(x,y)| \leq \|T\| \ \|M\|_{\mathcal{M}}$$

$$\sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ \|y\|\leq 1}} |(Tx,y)| = \|T\| \leq \sup_{\|M\|\leq 1} (m'_T, M(x\otimes y)) \ .$$

L'application m'_T est un élément du dual de $\mathcal{M}_{\mathfrak{B}}$. Le théorème de Hahn Banach nous assure l'existence d'un prolongement de m'_T en une forme linéaire continue m sur $\mathcal{M}$ telle que :

$$\|m'\|_{\mathcal{M}'} = \|T\|$$

$$\langle Tx,y\rangle = (m', M(x\otimes y)) \ .$$

C - CARACTERISATION DES OPERATEURS SUBORDINATIFS DANS LES ESPACES A ACCOUPLEMENTS

1. ELEMENT m' DE $\mathcal{M}'$ ASSOCIE A UN OPERATEUR SUBORDINATIF CONTINU

Soit $(\mathfrak{N},\mathfrak{A})$ un espace à accouplements. Soit $\{U_t\}_{t\in G}$ un groupe d'opérateurs unitaires $\mathfrak{A}$-faiblement continu. Pour tout accouplement a de $\mathfrak{A}$, le groupe $\{U_t\}_{t\in G}$ se prolonge à l'espace de Hilbert $\mathfrak{N}_a$ en un groupe d'opérateurs unitaires fortement continu.

Soit T un opérateur subordinatif continu de $\mathfrak{N}$ dans $\mathfrak{N}$. La propriété VIII donne :

$$|a(Tx,y)| = |\int I_x(Tx) M(x,y,a)|$$

$$|a(Tx,Tx)| = |\int I_x(Tx)\overline{I_x(Tx)} M(x,x,a)|$$

$$|a(Tx,Tx)| = \|T\|^2 \, \|M(x,x,a)\| = \|T\|^2 \, \|x\|^2_{\mathfrak{N}_a}$$

La première relation montre que si deux éléments x et z de $\mathfrak{N}$ représentent la même classe d'équivalence dans $\mathfrak{N}_a$, alors $Tx = Tz$ dans $\mathfrak{N}_a$.

Soit π_a l'application canonique de $\mathfrak{N}$ dans $\mathfrak{N}_a$. L'application linéaire bornée définie sur $\pi_a\mathfrak{N}$ par $y = \pi_a(x) \mapsto \pi_a(Tx)$ se prolonge à $\mathfrak{N}_a$ en un opérateur continu T_a avec $\|T_a\| \leq \|T\|$. Il n'est pas difficile de vérifier que le prolongement T_a est encore subordinatif.

Théorème IX.

Soit T un opérateur subordinatif continu de $\mathfrak{N}$ dans $\mathfrak{N}$, alors il existe m' dans $\mathscr{M}'$ tel que :

i) $\|m'\|_{\mathscr{M}'} = \|T\|$

ii) *pour tout tenseur* $\theta = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes L_i$ *dans* $\mathfrak{N} \otimes \mathfrak{N}'$,
$\sum_{i=1}^{n} \langle Tx_i, L_i \rangle = \langle m', M(\theta) \rangle$.

Soient $\theta = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes L_i$ et $\theta' = \sum_{j=1}^{p} u_j \otimes K_j$ deux tenseurs de $\mathfrak{N} \otimes \mathfrak{N}'$ tels que $M(\theta) = M(\theta')$. La propriété [ch. II, B.4] implique l'existence d'un élément a de $\mathfrak{A}$ et $\bar{y}_i$, $\bar{v}_j$ dans $\mathfrak{N}_a$ tels que $L_i = \ell_a(\bar{y}_i)$, $K_j = \ell_a(\bar{v}_j)$ $i = 1$ à n, $j = 1$ à p.

En appliquant le théorème pour les espaces de Hilbert, nous obtenons :

$$\int_\Gamma M(\sum_{i=1}^{n} Tx_i \otimes L_i) = \sum_{i=1}^{n} a(Tx_i, \bar{y}_i) = \sum_{j=1}^{p} a(Tu_j, \bar{v}_j) = \int_\Gamma M(\sum_{j=1}^{p} Tu_j \otimes K_j)$$

L'opérateur T définit une application linéaire de $\mathscr{M}_{\mathfrak{N}}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$M(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes L_i) \to \int_\Gamma M(\sum_{i=1}^{n} Tx_i \otimes L_i)$$

Cette application est continue :

$$\left|\int_\Gamma M\left(\sum_{i=1}^{n} Tx_i \otimes L_i\right)\right| \leq \|T_a\| \; \|M\|_{\mathcal{M}} \leq \|T\| \; \|M\|_{\mathcal{M}}$$

Comme pour le théorème VIII, nous déduisons l'existence d'un élément m' du dual fort $\mathcal{M}'_{\mathfrak{R}}$ de $\mathcal{M}_{\mathfrak{R}}$ tel que :

$$- \int_\Gamma M\left(\sum_{i=1}^{n} Tx_i \otimes L_i\right) = (m', M(\theta)) = \sum_{i=1}^{n} (Tx_i, L_i)$$

$$- \|m'\| \leq \|T\|$$

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe x tel que $\|x\| = 1$ et $\|Tx\| \geq \|T\| - \epsilon/2$, c'est-à-dire il existe a dans $\mathcal{A}$ tel que :

$$[a(Tx,Tx)]^{1/2} \geq \|T\| - \epsilon$$

L'expression $a(Tx,Tx)$ peut s'écrire :

$$|a(Tx,Tx)| = |(m', M(x,Tx,a))| \leq \|m'\| \; \|M(x,Tx,a)\|$$

$$|a(Tx,Tx)| \leq \|m'\| \; \|T\| \; \|x\|^2$$

Nous obtenons l'inégalité :

$$\|m'\| \; \|T\| \geq \|T\|^2 - 2\epsilon \|T\| + \epsilon^2$$

$$\|m'\| \geq \|T\| - 2\epsilon + \frac{\epsilon^2}{\|T\|}$$

L'inégalité est vraie pour tout ϵ donc $\|m'\| \geq \|T\|$, c'est-à-dire $\|m'\| = \|T\|$. En appliquant le théorème de Hahn Banach, il existe un élément de $\mathcal{M}'$ (encore noté m') tel que :

$$- (m', M(\theta)) = \sum_{i=1}^{n} \langle Tx_i, L_i \rangle$$

$$- \|m'\|_{\mathcal{M}'} = \|T\|$$

ce qui achève la démonstration.

Définition.

Nous dirons que l'espace de mesures $\mathcal{M}_{\mathfrak{R}}$ est engendré par une suite de mesures positives $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si pour tout μ dans $\mathcal{M}_{\mathfrak{R}}$ il existe une

suite $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, Φ_n dans $L_1(\mu_n)$ telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \|\mu - \sum_{i=1}^{n} \Phi_i\mu_i\|_{\mathcal{M}} = 0$$

Corollaire X.

Si $\mathcal{M}_{\mathfrak{N}}$ est engendré par une suite de mesures positives $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\|\mu_n\|_{\mathcal{M}} = 1$ mutuellement singulières, alors pour tout opérateur T subordinatif continu, il existe une fonction borélienne bornée Φ telle que :

- $\|\Phi\|_\infty = \|T\|$
- $\sum_{i=1}^{n}(Tx_i, L_i) = \int_\Gamma \Phi(\gamma) M(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes L_i)$

quel que soit x_i dans $\mathfrak{N}$, L_i dans $\mathfrak{N}'$.

Notons la mesure $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{2^n}$; l'espace $\mathcal{M}_{\mathfrak{N}}$ est un sous-espace vectoriel dense de $L^1(\mu)$. D'après le théorème précédent, pour tout opérateur subordinatif continu T , il existe m' dans $\mathcal{M}'_{\mathfrak{N}}$ tel que pour tout M dans $\mathcal{M}_{\mathfrak{N}}$ avec $M = M(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes L_i)$ nous ayons :

$$\langle m', M\rangle = \sum_{i=1}^{n} (Tx_i, L_i) .$$

L'élément m' peut être considéré comme un élément du dual de $L^1(\mu)$ c'est-à-dire de $L^\infty(\mu)$. Il existe Φ dans $L^\infty(\mu)$ tel que :

- $\|\Phi\|_\infty = \|m'\| = \|T\|$
- $\langle m', M\rangle = \int_\Gamma \Phi(\gamma).M$

La fonction Φ est unique aux ensembles μ-nuls près. Il est à remarquer que pour tout x dans $\mathfrak{N}$ nous avons :

$$a(TU_t x, x) = \int_\Gamma \langle\gamma, t\rangle I_x(Tx) M(x, x, a)$$

c'est-à-dire $\Phi = I_x(Tx)$ S_x-presque partout.

Remarque :

Si $\mathfrak{N}$ est un espace de Hilbert séparable (ou si mult $E \leq \aleph_0$), nous sommes dans les hypothèses du théorème et nous retrouvons le résultat du

théorème énoncé au paragraphe B-.

2. ALGEBRE DES OPERATEURS SUBORDINATIFS

Il n'est pas difficile de vérifier que l'ensemble $\mathcal{S}$ des opérateurs subordinatifs continus est une sous-algèbre de Banach commutative de $\mathcal{L}(\mathfrak{N})$, algèbre des opérateurs continus de $\mathfrak{N}$ dans $\mathfrak{N}$.

Le théorème IX donne une isométrie entre l'ensemble $\mathcal{S}$ et un sous-ensemble du dual $\mathcal{M}'_{\mathfrak{N}}$ de $\mathcal{M}_{\mathfrak{N}}$. D'après la théorie générale [(26), p. 135] le dual de $\mathcal{M}_{\mathfrak{N}}$ s'identifie à l'espace vectoriel $\mathcal{M}'_{\mathfrak{N}} = \mathcal{M}'/\mathcal{M}^{\circ}_{\mathfrak{N}}$ où $\mathcal{M}^{\circ}_{\mathfrak{N}} = \{m' \in \mathcal{M}' , (m', M) = 0$ pour tout M dans $\mathcal{M}_{\mathfrak{N}}\}$.

L'espace vectoriel $\mathcal{M}'$ possède une structure d'algèbre de Banach commutative pour le produit de ARENS [(1)].

Le produit ponctuel dans $\mathcal{C}_o(\Gamma)$ permet d'associer à une fonction f de $\mathcal{C}_o$ et à une mesure μ, une mesure $f \cdot \mu$ avec $(g, f\mu) = \int_{\Gamma} gfd\mu$. Cette application admet un prolongement à $\mathcal{M}' \times \mathcal{M}$, et à m' dans $\mathcal{M}'$, μ dans $\mathcal{M}$, correspond la mesure $m' \cdot \mu$ définie par $(f, m'\mu) = (m', f \cdot \mu)$. Le produit de ARENS de deux éléments m' et m'' de $\mathcal{M}'$ est donné par

$$(m' \cdot m'', \mu) = (m', m'' \cdot \mu) .$$

La propriété V [ch. III, D.1] implique que si μ est un élément de $\mathcal{M}_{\mathfrak{N}}$, $f \cdot \mu$ est encore dans $\mathcal{M}_{\mathfrak{N}}$ quel que soit f dans $\mathcal{C}$, c'est-à-dire si m' est dans $\mathcal{M}^{\circ}_{\mathfrak{N}}$, nous avons :

$$(m' \cdot \mu, f) = (m', \mu \cdot f) = 0 .$$

Soit m'' dans $\mathcal{M}'$ alors $(m'' \times m', \mu) = (m'', m' \cdot \mu) = 0$, donc le produit $m'' \cdot m'$ étant dans $\mathcal{M}^{\circ}_{\mathfrak{N}}$ quel que soit m'' dans $\mathcal{M}'$, le polaire $\mathcal{M}^{\circ}_{\mathfrak{N}}$ de $\mathcal{M}_{\mathfrak{N}}$ est un idéal de $\mathcal{M}'$. L'espace vectoriel $\mathcal{M}'/\mathcal{M}^{\circ}_{\mathfrak{N}}$, quotient de l'algèbre $\mathcal{M}'$ par l'idéal $\mathcal{M}^{\circ}_{\mathfrak{N}}$ est une algèbre. Nous obtenons :

Théorème XI.

L'algèbre $\mathcal{S}$ des opérateurs subordinatifs continus est isomorphe et isométrique à une sous-algèbre de $\mathcal{M}'/\mathcal{M}'^{\circ}_{\mathfrak{N}}$, munie du produit de ARENS.

Il reste à démontrer que l'isométrie de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{M}'/\mathcal{M}'^{\circ}_{\mathfrak{N}}$ est un homomorphisme d'algèbre.

Soient T_1 et T_2 deux opérateurs de $\mathcal{S}$ et m'_1 et m'_2 les deux éléments de $\mathcal{M}'/\mathcal{M}'^{\circ}_{\mathfrak{N}}$ associés.

Pour tout λ et μ dans $\mathbb{C}$, $\theta = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes L_i$ dans $\mathfrak{N} \otimes \mathfrak{N}'$ nous avons :

$$- \sum_{i=1}^{n} ((\lambda T_1 + \mu T_2)x_i, L_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} (T_1 x_i, L_i) + \mu \sum_{i=1}^{n} (T_2 x_i, L_i)$$

$$= \lambda(m'_1, M(\theta)) + \mu(m'_2, M(\theta))$$

$$= (\lambda m'_1 + \mu m'_2, M(\theta))$$

$$- \sum_{i=1}^{n} (T_1 T_2 x_i, L_i) = (m'_1, M(\sum_{i=1}^{n} T_2 x_i \otimes L_i))$$

Pour tout f dans $\mathcal{C}_o(\Gamma)$ $(M(\sum_{i=1}^{n} T_2 x_i \otimes L_i), f) = (m'_2, M(\theta).f)$ c'est-à-dire la mesure $M(\sum_{i=1}^{n} T_2 x_i \otimes L_i)$ est égale à la mesure $m'_2.M(\theta)$. Nous obtenons alors :

$$\sum_{i=1}^{n} (T_1 T_2 x_i, L_i) = (m'_1.m'_2, M(\theta)) .$$

A l'opérateur $T_1 T_2$ est associé l'élément $m'_1.m'_2$ de $\mathcal{M}'/\mathcal{M}'^{\circ}_{\mathfrak{N}}$.

La sous-algèbre $\mathcal{S}$ de $\mathcal{L}(\mathfrak{N})$ est caractérisée par le résultat suivant,

Théorème XII.

Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

a) T est un opérateur subordinatif continu

b) T appartient à l'orthogonal dans $\mathcal{L}(\mathfrak{N})$ du noyau de l'application M .

c) T appartient au sous-espace fermé pour la topologie forte (ou faible) d'opérateurs engendré par le groupe $\{U_t\}_{t\in G}$ dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{R})$.

Les conditions a) et c) entraînent que $\mathfrak{S}$ est le sous-espace fermé pour la topologie forte d'opérateurs engendré par le groupe $\{U_t\}_{t\in G}$ dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{R})$.

Les adhérences d'un ensemble convexe d'opérateurs pour la topologie forte et pour la topologie faible d'opérateurs coïncident [(11), 5 p. 477).

Le dual topologique de $\mathfrak{L}(\mathfrak{R})$ pour la topologie forte (ou faible) d'opérateurs est isomorphe à $\mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R}'$. Soit $\theta = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes L_i$, un élément du noyau de l'application M . L'injectivité de la transformation de FOURIER-STIELTJES entraîne $M(\theta) = 0$ si et seulement si $\widehat{M(\theta)}(t) = \sum_{i=1}^{n} (U_t x_i, L_i) = 0$ pour tout t dans G , donc l'orthogonal du groupe $\{U_t\}_{t\in G}$ est le noyau de l'application M .

Par dualité, l'orthogonal du noyau M est l'adhérence du sous-espace vectoriel engendré par le groupe d'opérateurs $\{U_t\}_{t\in G}$ dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{R})$ pour la topologie faible $\sigma(\mathfrak{L}(\mathfrak{R}),\mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R}')$ [ch. III.A] (ou pour la topologie forte d'opérateurs).

La condition c) entraîne que pour tout x , T_x est limite d'éléments de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_{t_i}$, c'est-à-dire comme $\mathcal{V}_x$ est fermé Tx appartient à $\mathcal{V}_x$, donc T est subordinatif.

Soit $\theta = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes L_i$ un élément du noyau de M ; le théorème X donne :

$$\int_\Gamma M\Big(\sum_{i=1}^{n} Tx_i \otimes L_i\Big) = (m', M(\theta)) = 0$$

c'est-à-dire T appartient à l'orthogonal dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{R})$ du noyau de M .

3. $\mathfrak{S}_\Sigma$ - TOPOLOGIE

Soit T un opérateur subordinatif, le théorème XII montre que T est limite d'éléments de $\mathfrak{S}$ de la forme $\pi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_{t_i}$; c'est-à-dire, il existe un filtre $\wp$ de polynômes $\pi_p = \sum_{i=1}^{n_p} \lambda_{i_p} \langle \gamma, t_{i_p} \rangle$ tel que pour tout x dans $\mathfrak{R}$,

$$\lim_{p\in\mathcal{P}} \left\| Tx - \sum_{i=1}^{n_p} \lambda_{i_p} U_{t_{i_p}} . x \right\| = 0$$

En utilisant les propriétés des normes, l'égalité devient :

$$\lim_{p\in\mathcal{P}} \sup_{\|L\|_{\mathfrak{N}'}\leq 1} \left| (Tx - \sum_{i_p=1} \lambda_{i_p} U_{t_{i_p}} x, L) \right| = 0$$

L'élément m' de $\mathcal{M}'/\mathcal{M}'^{\circ}_{\mathfrak{N}}$ associé à T vérifie pour tout x dans $\mathfrak{N}$ et L dans $\mathfrak{N}'$, $\langle m', M(x\otimes L)\rangle = \langle Tx, L\rangle$. L'expression précédente peut s'écrire dans $\mathcal{M}'/\mathcal{M}'^{\circ}_{\mathfrak{N}}$:

$$\lim_{p\in\mathcal{P}} \sup_{\|L\|_{\mathfrak{N}'}\leq 1} \left| (m' - \pi_p, M(x\otimes L)) \right| = 0$$

L'ensemble $\{M(x\otimes L), \|L\|_{\mathfrak{N}'}\leq 1\}$ est l'image de la boule unité de $\mathfrak{N}'$ par M_x (ou l'image de la boule unité de $\mathcal{V}_x$ par m_x).

Notons $\sum_x$ cet ensemble de mesures associé à x et $\mathfrak{S}_\Sigma$ l'ensemble $\{\sum_x\}_{x\in\mathfrak{N}'}$. La topologie forte d'opérateurs correspond dans $\mathcal{M}'/\mathcal{M}'^{\circ}_{\mathfrak{N}}$ à la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles $\sum_x$. Cette topologie est appelée la $\mathfrak{S}_\Sigma$-topologie.

Les ensembles $\sum_x$ sont des parties convexes, équilibrées et bornées. La réunion des ensembles $\sum_{i=1}^{n_x} (\sum_{x_i})$ est totale dans $\mathcal{M}_{\mathfrak{N}}$. La théorie des espaces vectoriels topologiques [(8), ch.III, §3] implique que la $\mathfrak{S}_\Sigma$-topologie munit $\mathcal{M}'/\mathcal{M}'^{\circ}_{\mathfrak{N}}$ d'une structure d'espace vectoriel localement convexe séparé.

Les théorèmes XI et XII donnent pour l'algèbre $\mathfrak{S}$ la caractérisation suivante :

Corollaire XIII.

L'algèbre $\mathfrak{S}$ des opérateurs subordinatifs continus est isomorphe et isométrique à l'adhérence pour $\mathfrak{S}_\Sigma$-topologie de la sous-algèbre de $\mathcal{M}'/\mathcal{M}'^{\circ}_{\mathfrak{N}}$ engendrée par les polynômes trigonométriques.

L'image par H des fonctions continues et bornées dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{N})$ contient le sous-espace engendré par le groupe $\{U_t\}_{t\in G}$. Les opérateurs

H_Φ associés à Φ appartenant à $\mathcal{C}$ sont subordinatifs, donc l'algèbre $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}'/\mathcal{M}'^\circ_{\mathfrak{N}}$ est dense pour la $\mathcal{S}_\Sigma$-topologie dans l'image de $\mathcal{S}$.

Corollaire XIV (Espace de Hilbert)

L'algèbre $\mathcal{S}$ des opérateurs subordinatifs continus par rapport au groupe $\{U_t\}_{t\in G}$ d'opérateurs unitaires fortement continu est isomorphe et isométrique à l'algèbre (pour le produit de ARENS) $\mathcal{M}'/\mathcal{M}'^\circ_{\mathfrak{H}}$.

Dans le cas des espaces de Hilbert les ensembles Σ_x sont définis par $\Sigma_x = \{\mu \in \mathcal{M} : d\mu = \rho d\mu_x$ avec $\rho \in L^2(\mu_x), \|\rho\|_{L^2(\mu_x)} \leq 1\}$.

Soit m' un élément de $\mathcal{M}'/\mathcal{M}'^\circ_{\mathfrak{H}}$; pour tout x dans $\mathfrak{H}$, il existe Φ_x unique appartenant à $L^\infty(\mu_x)$ telle que $(m', \rho\mu_x) = (\Phi_x, \rho\mu_x)$ quel que soit ρ dans $L^1(\mu_x)$.

L'application de $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$(x,y) \to (m', M(x \otimes y))$$

est bilinéaire avec $|(m', M(x\otimes y))| \leq \|m'\| \, \|x\| \, \|y\|$. Il existe un opérateur T de $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{H}$ tel que :

- $\|T\| \leq \|m'\|$
- $(Tx, y) = (m', M(x \otimes y))$.

Soit P la projection orthogonale sur le sous-espace $\mathcal{V}_x$; nous avons $M(x\otimes y) = M(x \otimes Py)$ c'est-à-dire $(Tx,y) = (Tx, Py) = (PTx, y)$ quel que soit y dans $\mathfrak{H}$. Nous pouvons conclure que $Tx = PTx$, donc Tx appartient à $\mathcal{V}_x$. L'opérateur T est subordinatif. En restriction au sous-espace $\mathcal{V}_x$ T est défini par :

$$T = h_{\Phi_x} .$$

Propriété XV.

Tout opérateur subordinatif continu admet un opérateur $\mathcal{A}$-adjoint subordinatif continu.

Soit T un opérateur subordinatif continu. Soit $\{\pi_p\}_{p\in\Psi}$ un filtre Ψ de polynômes tel que $\lim_{p\in\Psi} \|(T - \sum_{i_p=1}^{n_p} \lambda_{i_p} U_{t_{i_p}})x\| = 0$.

Notons $\overline{Tx} = I_x^{-1}(\overline{I_x(Tx)})$; nous obtenons :

$$\lim_{p\in\Psi} \|\overline{Tx} - \sum_{i_p=1}^{n_p} \bar{\lambda}_{i_p} U_{-t_{i_p}} x\| = 0$$

L'application $T^* : x \to T^*x = \overline{Tx}$ est évidemment linéaire et $\|Tx\| = \|T^*x\|$ pour tout x . T^* est un opérateur continu adhérent pour la topologie forte d'opérateurs au sous-espace de $\mathfrak{L}(\mathfrak{N})$ engendré par le groupe $\{U_t\}_{t\in G}$, donc T^* est subordinatif et vérifie pour tout a dans $\mathcal{A}$, x,y dans $\mathfrak{N}$

$$a(x,T^*y) = \lim_{\Psi} a(x, \sum_{i_p=1}^{n_p} \bar{\lambda}_{i_p} U_{-t_{i_p}} y) = \lim_{\Psi} a(\sum_{i_p=1}^{n_p} \lambda_{i_p} U_{t_{i_p}} x, y) = a(Tx,y)$$

Les opérateurs T et T^* sont $\mathcal{A}$-adjoints.

Remarque :

L'isométrie de $\mathcal{S}$ dans la sous-algèbre de $\mathcal{M}'/\mathcal{M}'^{\circ}_{\mathfrak{N}}$ engendrée par $\mathcal{C}$ pour la $\mathfrak{S}_\Sigma$-topologie est un isomorphisme d'algèbre stellaire.

D - SOUS-ESPACES $\mathfrak{N}_{\mathcal{F}}$

Soit $\mathcal{F}$ une sous-algèbre stellaire de $\mathcal{M}'$ telle que l'adhérence $\mathcal{F}$ pour la norme $\|.\|_{\mathcal{M}'}$ contienne $\mathcal{C}^\sim$.

Notons $\mathfrak{N}_{\mathcal{F}}$ l'ensemble des éléments x de $\mathfrak{N}$ tel que leur ensemble spectral S_x soit compact pour la topologie de dualité $\sigma(\mathcal{M},\mathcal{F})$. D'après [(3), th.II] un élément de x appartient à $\mathfrak{N}_{\mathcal{F}}$ si et seulement si l'ensemble des mesures Σ_x , définie au paragraphe précédent, est compact pour la topologie $\sigma(\mathcal{M},\mathcal{F})$.

L'ensemble $\mathfrak{N}_{\mathcal{F}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{N}$ et comme dans [(4), § VI] on démontre que $\mathfrak{N}_{\mathcal{F}}$ est fermé. L'espace $(\mathfrak{N}_{\mathcal{F}},\mathcal{A})$ est un

espace à accouplements. En général, ce sous-espace est peut être réduit l'ensemble $\{0\}$.

Soit x un élément de $\mathfrak{N}_{\mathcal{F}}$; d'après [(3), th.I], l'image canonique $\tilde{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$ dans $\cap(S_x)$ est dense dans Λ_x . Nous pouvons associer à tout élément F de $\mathcal{F}$ un opérateur subordinatif H_F de $\mathfrak{N}_{\mathcal{F}}$ dans $\mathfrak{N}_{\mathcal{F}}$ défini par :

$$H_F(x) = I_x^{-1}(\tilde{F})$$

L'application H de $\mathcal{F}$ dans φ est un homomorphisme d'algèbre continu et coïncide sur $\mathbb{C}$ avec l'application définie au paragraphe A. Nous avons :

$$\|H_F\| \leq \|F\|_{\mathcal{M}},$$

Les théorèmes de caractérisations des opérateurs subordinatifs continus appliqués aux espaces $\mathfrak{N}_{\mathcal{F}}$ s'écrivent :

Théorème.

Pour un opérateur continu de $\mathfrak{N}_{\mathcal{F}}$ dans $\mathfrak{N}_{\mathcal{F}}$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) T est un opérateur subordinatif continu de $\mathfrak{N}_{\mathcal{F}}$ dans $\mathfrak{N}_{\mathcal{F}}$.

b) T appartient à l'orthogonal dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{N}_{\mathcal{F}})$ du noyau de l'application $M : \mathfrak{N}_{\mathcal{F}} \otimes \mathfrak{N}'_{\mathcal{F}} \to \mathcal{M}$.

c) T appartient à l'adhérence pour la topologie forte du sous-espace vectoriel engendré dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{N}_{\mathcal{F}})$ par l'ensemble des opérateurs $\{H_F\}_{F \in \mathcal{F}}$.

Théorème.

L'algèbre φ des opérateurs subordinatifs continus de $\mathfrak{N}_{\mathcal{F}}$ dans $\mathfrak{N}_{\mathcal{F}}$ est isomorphe et isométrique à la sous-algèbre fermée pour la $\mathfrak{S}_{\Sigma}$-topologie engendrée par $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{M}'/\mathcal{M}'^{\circ}_{\mathfrak{N}_{\mathcal{F}}}$.

Exemples d'espaces $\mathfrak{N}_{\mathcal{F}}$.

a) $\mathcal{F} = \mathbb{C}$. L'espace $\mathfrak{N}_{\mathcal{F}}$ est exactement l'espace $\mathfrak{N}$.

b) $G = \mathbb{R}$ et $\mathcal{F} = \mathcal{R}$: espace des fonctions localement réglées et bornées; pour chaque x appartenant à $\mathfrak{N}_{\mathcal{F}}$ l'espace Λ_x est engendré par les fonctions en escaliers, c'est-à-dire le sous-espace engendré par les fonctions caractéristiques d'intervalles est dense dans Λ_x .

c) $\mathcal{F} = \mathrm{Sci}$ espace des fonctions semi-continues inférieurement (ou supérieurement)

ou $\mathcal{F} = \beta_o$ espace engendré par les fonctions caractéristiques des fermés

ou $\mathcal{F} = \mathcal{B}$ espace des fonctions universellement mesurables et bornées

ou $\mathcal{F} = \mathcal{m}'$.

Les espaces $\mathfrak{N}_{\mathrm{Sci}}, \mathfrak{N}_{\beta_o}, \mathfrak{N}_{\mathcal{B}}$ et $\mathfrak{N}_{\mathcal{m}'}$ sont les mêmes d'après ([10], [13]) Pour tout x appartenant à $\mathfrak{N}_{\mathcal{m}'}$, l'espace Λ_x associé est engendré par les fonctions caractéristiques des ensembles universellement mesurables.

L'algèbre φ des opérateurs subordinatifs continus de $\mathfrak{N}_{\mathcal{m}'}$ dans $\mathfrak{N}_{\mathcal{m}'}$ est isomorphe et isométrique à $\mathcal{m}'/\mathcal{m}'_{\mathfrak{N}_{\mathcal{m}'}}$.

CHAPITRE V

INTEGRATION DANS LES ESPACES A ACCOUPLEMENTS

Dans ce chapitre, nous allons donner le schéma général d'une théorie ensembliste de la mesure dans les espaces à accouplements. Le développement de la théorie est inspirée de l'étude des c.a.o.s. mesures faite par MASANI ([18], [19]).

Les semi-clans, notion due à VON NEUMANN [(22), p. 85] apparaissent comme un domaine de définition approprié pour les $\mathfrak{A}$-mesures en vue d'un théorème de représentation spectrale des groupes d'opérateurs.

De nombreuses propriétés de la théorie classique de l'intégration seront utilisées ([14], [20]).

Volontairement, les généralisations possibles à l'intégration par rapport à un système de mesures ne seront pas démontrées systématiquement. Dans le cas où le système de mesures est composé de mesures de probabilité, les résultats ont été obtenus par G. LUMER [(16), pp. 7-17].

A - INTEGRATION PAR RAPPORT A UNE $\mathfrak{A}$-MESURE

1. DEFINITIONS

Définition.

$\mathcal{P}$ est un semi-clan défini sur X si $\mathcal{P}$ est une famille non vide de parties de X telle que pour tout A , B dans $\mathcal{P}$:

α) $A \cap B \in \mathcal{P}$

β) il existe un nombre fini d'éléments de $\mathcal{P}$, $\{C_1,\dots,C_n\}$, deux à deux disjoints tels que

$$A - B = C_1 \cup C_2,\dots, \cup C_n \ .$$

Il est à remarquer que la condition β) est équivalente à γ) :

γ) si $A \supset B$, il existe une chaine finie $N_o,\dots,N_k$ d'éléments de $\mathcal{P}$ telle que

$$B = N_o \subset N_1,\dots, \subset N_k = A$$

avec $N_i \subset N_j$ équivalent à $N_i \subset N_j$ et $N_j - N_i$ dans $\mathcal{P}$.

Définition.

Soit $\mathcal{P}$ un semi-clan sur X et $(\mathfrak{R},\mathcal{A})$ un espace à accouplements. Nous dirons que ξ est une $\mathcal{A}$-mesure sur $\mathcal{P}$ si :

α) ξ est une fonction d'ensemble définie sur $\mathcal{P}$ à valeurs dans $\mathfrak{R}$.

β) ξ est dénombrablement additive :

soit $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{P}$, deux à deux disjoints telle que $\overset{\infty}{\underset{1}{\cup}} A_k$ soit dans $\mathcal{P}$ alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} \xi(A_k)$ converge commutativement vers $\xi(\overset{\infty}{\underset{1}{\cup}} A_k)$ dans $\mathfrak{R}$.

γ) Si A et B sont deux éléments disjoints de $\mathcal{P}$ alors pour tout a dans $\mathcal{A}$

$$a(\xi(A),\xi(B)) = 0$$

La définition même d'une $\mathcal{A}$-mesure implique les propriétés classiques de la théorie de la mesure que nous donnons sans démonstration :

Propriétés.

Soit ξ une $\mathcal{A}$-mesure définie sur le semi-clan $\mathcal{P}$ et soient A et B dans $\mathcal{P}$.

a) si $A - B \in \mathcal{P}$ alors $\xi(A-B) = \xi(A) - \xi(A \cap B)$

b) si $B \subset A$ et $A - B \in \mathcal{P}$ alors $\xi(A-B) = \xi(A) - \xi(B)$

c) si $A \cup B \in \mathcal{P}$ alors $\xi(A \cup B) = \xi(A) + \xi(B) - \xi(A \cap B)$

d) si $A \Delta B \in \mathcal{P}$ alors $\xi(A \Delta B) = \xi(A) + \xi(B) - 2\xi(A \cap B)$.

2. ENSEMBLES S_ξ

Pour a fixé dans $\mathcal{A}$, la fonction d'ensemble définie sur $\mathcal{P}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$\mu_{\xi,a} = a(\xi(A),\xi(A)) = \|\xi(A)\|_a^2 \quad \text{quel que soit } A \text{ dans } \mathcal{P}$$

est une mesure finie positive dénombrablement additive sur $\mathcal{P}$.

Notons S_ξ l'ensemble des mesures $S_\xi = \{\mu_{\xi,a}\}_{a \in \mathcal{A}}$. La convexité de $\mathcal{A}$ entraîne que S_ξ est un ensemble convexe. L'application de $\mathcal{A}$ dans S_ξ

$$a \to \mu_{\xi,a}$$

est continue de $\mathcal{A}$ dans S_ξ , muni de la topologie la plus faible rendant les fonctions de S_ξ dans $\mathbb{C}$ $\mu_{\xi,a} \to \mu_{\xi,a}(A)$ continues. Cette topologie sera notée $\alpha(S_\xi,\mathcal{P})$.

Lorsque la topologie $\alpha(S_\xi,\mathcal{P})$ est séparée, l'ensemble S_ξ est compact.

Propriété.

Soit ξ une $\mathcal{A}$-mesure définie sur le semi-clan $\mathcal{P}$ alors pour tout A,B dans $\mathcal{P}$, a dans $\mathcal{A}$ nous avons :

a) $a(\xi(A),\xi(B)) = \mu_{\xi,a}(A \cap B)$

b) $a(\xi(A)-\xi(B),\xi(A)-\xi(B)) = \mu_{\xi,a}(A) + \mu_{\xi,a}(B) - 2\mu_{\xi,a}(A \cap B)$

c) si $B \subset A$ alors $\|\xi(A)-\xi(B)\|_a^2 = \mu_{\xi,a}(A) - \mu_{\xi,a}(B)$

d) si $B \subset A$ alors $\|\xi(B)\|_a \leq \|\xi(A)\|_a$

e) <u>si</u> $B \subset A$ <u>et</u> $\xi(A) = 0$ <u>alors</u> $\xi(B) = 0$

f) <u>si</u> $A \Delta B \in \mathcal{P}$ <u>alors</u> $\mu_{\xi,a}(A \Delta B) = \|\xi(A) - \xi(B)\|_a^2$.

Les cinq dernières propriétés sont des conséquences directes de a) et des définitions précédentes. Pour démontrer a), il suffit de vérifier que :

$$a(\xi(A),\xi(B)) = a(\xi(A \cap B),\xi(A \cap B)) \ .$$

Par définition, il existe un nombre fini d'éléments de $\mathcal{P}$, $\{C_i\}_{i=1}^{i=n}$, deux à deux disjoints tels que :

$$B - A \cap B = C_1 \cup \ldots \cup C_n$$

L'additivité de ξ et la linéarité de a entraînent :

$$a(\xi(A),\xi(B)) = a(\xi(A),\xi(A \cap B)) + \sum_{i=1}^{n} a(\xi(A),\xi(C_i))$$

L'intersection $(B - A \cap B) \cap A$ est vide, donc $A \cap C_i = \phi$ pour $i = 1,\ldots,n$, c'est-à-dire $a(\xi(A),\xi(C_i)) = 0$. L'égalité précédente s'écrit :

$$a(\xi(A),\xi(B)) = a(\xi(A),\xi(A \cap B)) \ .$$

La forme hermitienne a vérifie : $a(\xi(A),\xi(B)) = \overline{a(\xi(B),\xi(A))}$; nous obtenons :

$$a(\xi(A),\xi(B)) = a(\xi(A \cap B),\xi(B)) = a(\xi(A \cap B),\xi(A \cap B))$$

ce qui achève la démonstration.

<u>Propriété.</u>

<u>Les mesures de S_ξ sont uniformément dénombrablement additives sur $\mathcal{P}$, c'est-à-dire soit $\{A_k\}$ une suite d'éléments de $\mathcal{P}$ deux à deux disjoints telle que $\bigcup_1^\infty A_k$ soit dans $\mathcal{P}$ alors :</u>

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\mu \in S_\xi} \left| \mu\left(\bigcup_1^\infty A_k\right) - \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \right| = 0$$

<u>Démonstration :</u>

Soit μ une mesure de S_ξ , il existe a dans $\mathcal{A}$ tel que $\mu = \mu_{\xi,a}$. La propriété c) précédente donne :

$$\mu_{\xi,a}(\overset{\infty}{\underset{1}{\cup}} A_k) - \sum_{k=1}^{n} \mu_{\xi,a}(A_k) = \|\xi(\overset{\infty}{\underset{1}{\cup}} A_k) - \sum_{k=1}^{n} \xi(A_k)\|_a^2 \quad .$$

En passant à la borne supérieure sur l'ensemble d'accouplements α , nous obtenons :

$$\mu_{\xi,a}(\overset{\infty}{\underset{k=1}{\cup}} A_k) - \sum_{k=1}^{n} \mu_{\xi,a}(A_k) \leq \|\xi(\overset{\infty}{\underset{k=1}{\cup}} A_k) - \sum_{k=1}^{n} \xi(A_k)\|^2 \quad .$$

La α-mesure ξ est dénombrablement additive. L'expression $\|\xi(\overset{\infty}{\underset{k=1}{\cup}} A_k) - \sum_{k=1}^{n} \xi(A_k)\|^2$ tend vers zéro, c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\mu\in S_\xi} \|\mu(\overset{\infty}{\underset{k=1}{\cup}} A_k) - \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)\| = 0$$

Le problème de la réciproque se pose ; étant donné un ensemble de mesures S , à quelle condition est-il associé à une α-mesure ? Le résultat suivant sera très utile par la suite.

Théorème I.

Soit S un ensemble de mesures finies, positives, uniformément dénombrablement additives sur $\mathcal{P}$.

Soit ξ une fonction de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{R}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

α) pour tout $\mu \in S$, il existe $a \in \alpha$ tel que $\mu(A \cap B) = a(\xi(A), \xi(B))$ quel que soit A,B dans $\mathcal{P}$ et réciproquement tout élément a de α est associé à une mesure μ dans S telle que $\mu(A \cap B) = a(\xi(A), \xi(B))$.

β) ξ est une α-mesure et $S_\xi = S$.

Les propriétés précédentes impliquent β) entraîne α) de façon évidente.

Soient A et B deux parties de X appartenant à $\mathcal{P}$ telles que $A \cap B = \emptyset$. La condition α) donne :

Pour tout a dans α , il existe μ_a appartenant à S telle que $\mu_a(A \cap B) = a(\xi(A), \xi(B))$ c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$, $a(\xi(A), \xi(B)) = 0$.

Soient $\{A_k\}$ une suite d'éléments de $\mathcal{P}$, deux à deux disjoints telle que $\bigcup_1^\infty A_k$ appartienne à $\mathcal{P}$. Nous obtenons :

$$\|\xi(\bigcup_1^\infty A_k) - \sum_{k=1}^n \xi(A_k)\|_a^2 = \mu_a(\bigcup_1^\infty A_k) - \sum_{k=1}^n \mu_a(A_k)$$

Les mesures de S sont uniformément dénombrablement additives sur $\mathcal{P}$ c'est-à-dire, nous avons :

$$\lim_{n\to\infty} \|\xi(\bigcup_1^\infty A_k) - \sum_{k=1}^n \xi(A_k)\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sup_{a\in\mathcal{A}} \|\xi(\bigcup_1^\infty A_k) - \sum_{k=1}^n \xi(A_k)\|_a^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup_{\mu\in S} |\mu(\bigcup_1^\infty A_k) - \sum_{k=1}^n \mu(A_k)| = 0$$

La fonction ξ de $\mathcal{P}$ dans $\mathfrak{N}$ est dénombrablement additive sur $\mathcal{P}$ et vérifie pour A et B dans $\mathcal{P}$ avec $A\cap B = \phi$, $a(\xi(A),\xi(B)) = 0$ quel que soit a dans $\mathcal{A}$. ξ est une $\mathcal{A}$-mesure. La condition $S_\xi = S$ résulte directement de α).

3. EXTENSION DE HAHN DES $\mathcal{A}$-MESURES

Notons $B(\mathcal{P})$ le σ-clan engendré par le semi-clan $\mathcal{P}$ [(22), p. 86] Pour toute mesure μ de S_ξ, le théorème d'extension de HAHN [(14), pp.54-60] assure l'existence d'une mesure m_μ unique, positive, dénombrablement additive, σ-finie, définie sur $B(\mathcal{P})$ telle que $\mu(A) = m_\mu(A)$ quel que soit A dans $\mathcal{P}$.

Le problème est de savoir si l'ensemble $\{m_\mu\}_{\mu\in S_\xi}$ est encore associé à une $\mathcal{A}$-mesure définie sur $B(\mathcal{P})$. La réponse est en général non, mais nous pouvons prolonger ξ en une $\mathcal{A}$-mesure ξ_o définie sur un clan $\mathcal{P}_o$ contenant $\mathcal{P}$ tel que, en restriction à $\mathcal{P}_o$, l'ensemble $\{m_\mu\}_{\mu\in S_\xi}$ soit associé à ξ_o. Pour cela démontrons les lemmes suivants :

Soit $R(\mathcal{P})$ le clan engendré par $\mathcal{P}$ c'est-à-dire :

$$R(\mathcal{P}) = \{A : A = \bigcup_1^n A_k \quad A_k \text{ dans } \mathcal{P}, \text{ tels que } A_k\cap A_{k'} = \phi \text{ si } k\neq k'\}.$$

Lemme I.

Pour toute $\mathcal{A}$-mesure ξ définie sur $\mathcal{P}$ il existe une $\mathcal{A}$-mesure η définie sur $R(\mathcal{P})$ telle que :

a) $\eta(A) = \xi(A)$ <u>quel que soit</u> A <u>dans</u> $\wp$

b) $\mu_{\xi,a}(A) = m_{\mu_{\xi,a}}(A)$ <u>quel que soit</u> A <u>dans</u> $R(\wp)$.

Soient A un élément de $R(\wp)$ et deux familles finies d'ensembles $\{A_k\}_{k=1}^{k=n}$ et $\{B_h\}_{h=1}^{h=p}$ de $\wp$ telles que :

- $A_k \cap A_{k'} = \emptyset$ si $k \neq k'$
- $B_h \cap B_{h'} = \emptyset$ si $h \neq h'$
- $A = \bigcup_1^n A_k = \bigcup_1^p B_h$

Pour tout A_k , nous avons $\xi(A_k) = \sum_{h=1}^{p} \xi(A_k \cap B_h)$ c'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^{n} \xi(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{p} \xi(A_k \cap B_h) = \sum_{h=1}^{p} \xi(B_h) .$$

Cette égalité permet de définir une fonction η de $R(\wp)$ dans $\mathfrak{R}$: pour tout A dans $R(\wp)$, $\eta(A) = \sum_{k=1}^{n} \xi(A_k)$ quel que soit la suite d'éléments deux à deux disjoints de $\wp$ telle que $A = \bigcup_1^n A_k$.

Soient A et B dans $R(\wp)$ et $\{A_k\}_{k=1}^{k=n}$ et $\{B_h\}_{h=1}^{h=p}$ deux suites d'éléments deux à deux disjoints de $\wp$ telles que

$$A = \bigcup_1^n A_k \quad , \quad B = \bigcup_1^p B_h \quad .$$

Pour tout a dans $\mathfrak{a}$, nous avons :

$$a(\eta(A), \eta(B)) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{p} a(\xi(A_k), \xi(B_h)) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{p} \mu_{\xi,a}(A_k \cap B_h) .$$

La mesure $\mu_{\xi,a}$ admet un prolongement unique $m_{\mu_{\xi,a}}$ à $B(\wp)$, c'est-à-dire nous obtenons :

$$a(\eta(A), \eta(B)) = m_{\mu_{\xi,a}}(A \cap B) .$$

Il est évident que les mesures $\{m_\mu\}_{\mu \in S_\xi}$ sont uniformément dénombrablement additives sur $R(\wp)$ et en appliquant le théorème I, nous obtenons le résultat annoncé.

Notons $\mathcal{B}_\mu$ le clan contenu dans $B(\mathcal{P})$, associé à une mesure μ de S_ξ tel que $m_\mu(B) < +\infty$ quel que soit B dans $\mathcal{B}_\mu$

$$\mathcal{B}_\mu = \{B \in B(\mathcal{P}) : m_\mu(B) < +\infty\}$$

Notons $\mathcal{B}_o$ le clan contenant $R(\mathcal{P})$ tel que $\sup_{\mu \in S_\xi} m_\mu(B) < +\infty$ quel que soit B dans $\mathcal{B}_o$

$$\mathcal{B}_o = \{B \in B(\mathcal{P}) \sup_{\mu \in S_\xi} m_\mu(B) < +\infty\}$$

Cette famille n'est pas en général le clan intersection [(22), p. 86] des clans $\mathcal{B}_\mu$. Démontrons le résultat suivant, classique dans le cas d'une seule mesure [(20) exg p. 107]

Lemme II.

L'ensemble des classes d'équivalences ($A \equiv B$ si $m_\mu(A \Delta B) = 0$ quel que soit μ dans S_ξ) de $\mathcal{B}_o$ est un espace complet pour la métrique :

$$d(A,B) = \sup_{\mu \in S_\xi} m_\mu(A \Delta B) .$$

Il est évident que la relation $A \equiv B$ si $A \Delta B$ est S_ξ-nul est une relation d'équivalence et que d définit une métrique [(20), exg p.107]

Soit $\{A_k\}_1^\infty$ une suite de CAUCHY pour la métrique d , c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_o tel que pour tout n,m , $n_o < n$, $n_o < m$, $d(A_n,A_m) < \varepsilon$.

Il suffit de démontrer qu'il existe une sous-suite de $\{A_n\}$ convergente. Les propriétés des suites de CAUCHY permettent d'extraire une sous-suite $\{A'_n\}$ de $\{A_n\}$ telle que pour tout n

$$d(A'_n,A'_{n+1}) \leq \frac{1}{2^n} .$$

Notons $\{B_n\}$ la suite $B_n = \bigcap_n^\infty A'_k$ et $\{E_n\}$ la suite $E_1 = B_1$ et $E_n = B_n - B_{n-1}$.

Les parties E_n sont deux à deux disjointes. La partie $E = \bigcup_1^\infty E_n$ appartient à B_μ quel que soit μ dans S_ξ et

$$m_\mu(E) = \sum_1^\infty m_\mu(E_n) = \lim_{n\to\infty} m_\mu(B_n) \qquad (1)$$

La suite $\{\sup_{\mu\in S_\xi} m_\mu(A'_n)\}$ est une suite de CAUCHY dans $\mathbb{R}$, donc convergente vers un nombre noté ℓ. Nous avons :

$$m_\mu(E) \le m_\mu(A'_n) \qquad \text{quel que soit } \mu \text{ et } n$$

$$\sup_{\mu\in S_\xi} m_\mu(E) \le \ell$$

c'est-à-dire E appartient à $\mathcal{B}_o$.

Evaluons la distance $d(A'_n, B_n)$. Pour cela, utilisons la formule

$$A - A\cap B\cap C = (A - A\cap B) \cup [(B - B\cap C)\cap A] \qquad (2)$$

Pour tout élément μ dans S_ξ nous obtenons :

$$m_\mu(A'_n - B_n) = m_\mu(A'_n - A'_n \cap B_{n+1})$$

$$m_\mu(A'_n - B_n) \le m_\mu(A'_n - A'_n\cap A'_{n+1}) + m_\mu(A'_{n+1} - A'_{n+1}\cap B_{n+1}) .$$

La construction des suites $\{B_n\}$ donne $A'_{n+1} \cap B_{n+1} = B_{n+1}$ et nous obtenons

$$m_\mu(A'_n \Delta B_n) \le m_\mu(A'_n \Delta A'_{n+1}) + m_\mu(A'_{n+1} \Delta B_{n+1}) .$$

En passant à la borne supérieure sur S_ξ et par itération, nous avons :

$$d(A'_n, B_n) \le \sum_n^\infty 2^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{2^{n-1}} \qquad (3)$$

La suite $\{B_n\}_1^\infty$ converge pour toutes les distances $d_\mu(A\Delta B) = m_\mu(A\Delta B)$ vers E. Il n'est pas difficile de montrer en utilisant (3) que la suite de CAUCHY $\{A'_n\}$ converge vers E pour la métrique d.

Notons $\mathcal{P}_o$ l'adhérence de $R(\mathcal{P})$ (ou de $\mathcal{P}$) dans $\mathcal{B}_o$ pour la pseudo-métrique d définie par $d(A,B) = \sup_{\mu\in S_\xi} m_\mu(A\Delta B)$. $\mathcal{P}_o$ est un clan et l'ensemble des classes d'équivalence associé à $\mathcal{P}_o$ est complet pour la distance d.

Théorème II.

Soit ξ une $\mathcal{A}$-mesure définie sur le demi-clan $\mathcal{P}$ à valeurs dans $(\mathfrak{N}, \mathcal{A})$ alors il existe une $\mathcal{A}$-mesure unique η définie sur le clan $\mathcal{P}_o$ à

valeurs dans $(\mathfrak{N},\mathcal{A})$ telle que :

a) $\xi(A) = \eta(A)$ quel que soit A dans $\mathcal{P}$

b) $\mu_{n,a}(A) = m_{\mu_{\xi,a}}(A)$ quel que soit A dans $\mathcal{P}_o$.

Démonstration :

Soit A un élément de $\mathcal{P}_o$; il existe une suite $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$; A_n appartenant à $R(\mathcal{P})$ telle que $\lim_{n\to\infty} d(A_n,A) = 0$.

La suite d'éléments de $\mathfrak{N}$, $\{\xi(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de CAUCHY d'après l'égalité :

$$\|\xi(A) - \xi(B)\|_a^2 = m_{\mu_{\xi,a}}(A \Delta B)$$

$$\|\xi(A) - \xi(B)\|^2 = d(A \Delta B) .$$

La suite $\{\xi(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathfrak{N}$ vers un élément noté $\eta(A)$. Il est évident que $\eta(A)$ ne dépend pas de la suite $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ choisie. L'application η de $\mathcal{P}_o$ dans $\mathfrak{N}$ vérifie la propriété suivante :

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{P}_o$ et deux suites $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{P}$ convergentes respectivement vers A et vers B pour d . Quel que soit a dans $\mathcal{A}$, nous avons :

$$a(\eta(A_n),\eta(B_m)) = a(\xi(A_n),\xi(B_m)) = m_{\mu_{\xi,a}}(A_n \cap B_m) .$$

En prenant les limites, nous obtenons :

$$a(\eta(A),\eta(B)) = m_{\mu_{\xi,a}}(A \cap B) .$$

Nous déduisons en appliquant le théorème I à la fonction η et à l'ensemble de mesures $\{m_{\mu_{\xi,a}}\}_{a\in\mathcal{A}}$, que η est une $\mathcal{A}$-mesure et que son ensemble de mesures associées S_η est l'ensemble $S = \{m_\mu\}_{\mu\in S_\xi}$.

4. INTEGRATION PAR RAPPORT A UNE $\mathcal{A}$-MESURE

Soit S un ensemble de mesures positives, dénombrablement additives, définies sur un σ-clan $\mathcal{B}$ de X . Dans l'ensemble des fonctions $\mathcal{B}$-mesurables

telles que pour tout f ,

$$\|f\|^2 = \sup_{\mu \in S} \int_X |f|^2 d\mu < \infty$$

la relation " $f \equiv g$ si $f - g$ est S-nul " est une relation d'équivalence.

L'ensemble des classes d'équivalence $\cap(S)$ (ou $\cap_{s \in S} L^2(s)$) [ch. I, § A] est un espace vectoriel normé complet pour la norme

$$\|f\| = \sup_{\mu \in S} \left[\int_X |f^2| d\mu\right]^{1/2}$$

Ce résultat peut se démontrer de la même façon que pour les espaces $\cap(S)$ où S est un ensemble de mesures de RADON positives [(16), p.10]

Les fonctions de la forme $\sum_{p=1}^{n} \lambda_p \chi_{A_p}$ où λ_p est dans $\mathbb{C}$ et χ_{A_p} est la fonction caractéristique de l'ensemble A_p , appartiennent à $\cap(S)$ lorsque la suite $\{A_p\}_{p=1}^{n}$ est formée d'éléments de $\mathcal{B}_o$ avec :

$$\mathcal{B}_o = \{A \in \mathcal{B} \ , \ \sup_{\mu \in S} \mu(A) < +\infty\}$$

Ces fonctions sont appelées $\mathcal{B}_o$-simples et en général l'ensemble des fonctions $\mathcal{B}_o$-simples n'est pas dense dans l'espace vectoriel $\cap(S)$ [(16), p.11].

Soit ξ une $\mathcal{A}$-mesure à valeurs dans $(\mathfrak{N}, \mathcal{A})$ définie sur un semi-clan $\mathcal{P}$. Son extension au clan $\mathcal{P}_o$ est encore notée ξ et l'ensemble de mesures $\{\mu_{\xi,a}\}_{a \in \mathcal{A}}$ associé, S_ξ .

Notons Λ_ξ l'adhérence dans $\cap(S_\xi)$ des fonctions $\mathcal{P}_o$-simples (ou $R(\mathcal{P})$-simples). Les propriétés du clan $\mathcal{P}_o$ montrent que l'ensemble Λ_ξ est un sous-espace vectoriel fermé de $\cap(S_\xi)$.

Définition.

Soit $\varphi = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{A_k}$, A_k appartenant à $\mathcal{P}_o$, une fonction $\mathcal{P}_o$-simple. On appelle intégrale de φ par rapport à ξ l'élément de $\mathfrak{N}$ défini par :

$$\int_X \varphi \xi(du) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi(A_k).$$

La norme dans $\mathfrak{N}$ de l'élément $\int_X \varphi\xi(du)$ est donnée par la relation :

$$\|\int_X \varphi\xi(du)\|^2 = \sup_{a\in\mathcal{A}} [a(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi(A_k), \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi(A_k))]^{1/2}$$

$$\|\int_X \varphi\xi(du)\| = \sup_{a\in\mathcal{A}} \int |\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi(A_k)|^2 d\mu_{\xi,a}$$

$$\|\int_X \varphi\xi(du)\| = \|\varphi\|_{\cap(S_\xi)} \qquad (1)$$

Soit φ une fonction représentant une classe d'équivalence de Λ_ξ. Il existe une suite $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $\mathcal{P}_o$-simples convergente vers φ dans Λ_ξ.

La suite $\{\int_X \varphi_n \xi(du)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathfrak{N}$ est une suite de CAUCHY dans $\mathfrak{N}$ d'après (1), donc convergente vers un élément de $\mathfrak{N}$.

Soit $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une autre suite de fonctions $\mathcal{P}_o$-simples convergente vers φ. L'égalité (1) donne :

$$\|\int_X \varphi_n \xi(du) - \int_X \psi_n \xi(du)\| = \|\varphi_n - \psi_n\|_{\cap(S_\xi)}$$

c'est-à-dire la suite $\{\int_X \psi_n \xi(du)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans $\mathfrak{N}$. Nous pouvons donner la définition suivante.

Définition. (Intégration)

Soit φ une fonction représentant une classe d'équivalence de Λ_ξ. On appelle intégrale de φ par rapport à ξ l'élément de $\mathfrak{N}$:

$$\int_X \varphi(u)\xi(du) = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n(u)\xi(du)$$

où $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions $\mathcal{P}_o$-simples convergente vers φ dans Λ_ξ.

Propriété III.

Soient φ et ψ deux éléments de Λ_ξ. Nous avons les propriétés suivantes :

a) $\int_X (\alpha\varphi + \beta\psi)\xi(du) = \alpha \int_X \varphi\xi(du) + \beta \int_X \psi\xi(du)$

b) $\|\int_X \varphi\, \xi(du)\| = \|\varphi\|_{\Lambda_\xi}$

c) $a(\int_X \varphi\xi(du), \int_X \psi\xi(du)) = \int_X \varphi\bar{\psi}\, dm_{\mu_{\xi,a}}$ quel que soit a dans $\mathcal{A}$

d) Pour tout A dans $\mathcal{P}_o$, $\varphi\chi_A$ appartient à Λ_ξ et
$a(\int_X \varphi\chi_A\, \xi(du), \int_X \varphi\chi_B\, \xi(du)) = \int_X |\varphi|^2 \chi_{A\cap B}\, dm_{\mu_{\xi,a}}$ quel que soit a dans $\mathcal{A}$ et A,B dans $\mathcal{P}_o$.

Démonstration :

Les propriétés a) et b) sont évidentes d'après l'égalité des normes (1) pour les fonctions $\mathcal{P}_o$-simples.

Soient $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions $\mathcal{P}_o$-simples convergentes respectivement vers φ et ψ dans Λ_ξ. Les suites $\{\int_X \varphi_n \bar{\psi}_n\, dm_{\mu_{\xi,a}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $\int_X \varphi\bar{\psi}\, dm_{\mu_{\xi,a}}$ quel que soit a dans $\mathcal{A}$.

La continuité des accouplements a de $\mathfrak{N}\times\mathfrak{N}$ dans $\mathbb{C}$ donne :

$$\lim_{n\to\infty} a(\int_X \varphi_n\xi(du), \int_X \psi_n\xi(du)) = a(\int_X \varphi\xi(du), \int_X \psi\xi(du))$$

Pour les fonctions $\mathcal{P}_o$-simples, nous avons l'égalité suivante :

$$a(\int_X \varphi_n\xi(du), \int_X \psi_n\xi(du)) = \int_X \varphi_n\bar{\psi}_n\, dm_{\mu_{\xi,a}}$$

quel que soit a dans $\mathcal{A}$.

Après passage à la limite, nous obtenons :

$$a(\int_X \varphi\xi(du), \int_X \psi\xi(du)) = \int_X \varphi\bar{\psi}\, dm_{\mu_{\xi,a}}$$

quel que soit a dans $\mathcal{A}$.

Soit A appartenant à $\mathcal{P}_o$; pour tout n les fonctions $\varphi_n\chi_A$ sont encore des fonctions $\mathcal{P}_o$-simples, et nous avons :

$$\int_X |\varphi_n\chi_A - \varphi\chi_A|^2 dm_\mu \le \int_X |\varphi_n - \varphi|^2 dm_\mu \quad .$$

La suite de fonctions $\mathcal{P}_o$-simples $\{\varphi_n \chi_A\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\varphi\chi_A$, donc $\varphi\chi_A$ appartient à Λ_ξ.

En appliquant la propriété c) aux fonctions $\varphi\chi_A$ et $\varphi\chi_B$, nous obtenons le résultat annoncé.

Théorème IV.

Soit φ une fonction représentant une classe d'équivalence de Λ_ξ. La fonction d'ensemble η définie sur le clan $\mathcal{P}_o$ par :

$$\eta(A) = \int_X \varphi(u)\chi_A \xi(du) = \int_A \varphi(u)\xi(du)$$

pour tout A dans $\mathcal{P}_o$, est une $\mathcal{A}$-mesure à valeurs dans $(\mathfrak{R},\mathcal{A})$.

Son ensemble de mesures associé S_η est l'ensemble $\{\upsilon = |\varphi|^2 m_\mu\}_{\mu\in S_\xi}$.

Ce résultat est une conséquence directe de la propriété d) et du théorème I appliqué à η et à l'ensemble de mesures $\{|\varphi|^2 m_\mu\}_{\mu\in S_\xi}$. Il est à remarquer que si ψ représente un élément de Λ_η, la fonction $\psi\varphi$ est intégrable par rapport à ξ et nous avons l'égalité :

$$\int_X \psi(u)\eta(du) = \int_X \psi(u)\varphi(u)\xi(du) .$$

Théorème V. (d'Isomorphisme)

Soit $\mathcal{V}_\xi$ le sous-espace fermé de $\mathfrak{R}$ engendré par les combinaisons linéaires finies $\{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi(A_k)\}$.

L'application définie par :

$$\varphi \to \int_X \varphi\xi(du)$$

est un isomorphisme isométrique de Λ_ξ sur $\mathcal{V}_\xi$.

Les espaces $\mathcal{V}_\xi$ et Λ_ξ sont complets. D'après la propriété III, l'application $\varphi \to \int_X \varphi\xi(du)$ est linéaire et isométrique. L'image de Λ_ξ par cette isométrie contenant tous les éléments de la forme $\sum_1^n \lambda_k \xi(A_k)$,

A_k appartenant à $\mathcal{P}_o$, est dense dans $\mathcal{V}_\xi$. Nous en déduisons que l'application est surjective, ce qui démontre le théorème.

Remarque :

Le sous-espace $\mathcal{V}_\eta$ associé à une $\mathcal{C}$-mesure vérifiant les hypothèses du théorème IV est contenu dans le sous-espace $\mathcal{V}_\xi$.

B - $\mathfrak{L}$-MESURES - MESURES SPECTRALES

1. $\mathfrak{L}$-MESURES

Soient $(\mathfrak{N},\mathcal{C})$ un espace à accouplements et $\mathfrak{L}(\mathfrak{N})$ l'algèbre des opérateurs continus de $\mathfrak{N}$ dans $\mathfrak{N}$.

Soit $\mathcal{P}$ un semi-clan défini sur un ensemble X .

Définition.

Une fonction d'ensemble E définie sur $\mathcal{P}$ à valeurs dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{N})$ est appelée une $\mathfrak{L}$-mesure si :

a) pour tout A dans $\mathcal{P}$, $E(A)$ est un opérateur continu de $\mathfrak{N}$ dans $\mathfrak{N}$.

b) pour tout élément x de $\mathfrak{N}$, la fonction d'ensemble $\xi_x(A) = E(A).x$ quel que soit A dans $\mathcal{P}$, est une $\mathcal{C}$-mesure.

Par définition, les $\mathcal{C}$-mesures ξ_x associées à E étant dénombrablement additives, la fonction d'ensemble E est dénombrablement additive pour la topologie forte d'opérateurs. Réciproquement, une fonction d'ensemble E définie sur un semi-clan vérifiant les propriétés suivantes est une $\mathfrak{L}$-mesure :

a) pour tout A dans $\mathcal{P}$, $E(A)$ appartient à $\mathfrak{L}(\mathfrak{N})$.

b) E est dénombrablement additive sur $\mathcal{P}$ pour la topologie forte d'opérateurs.

c) Si A et B appartiennent à $\mathcal{P}$ tel que $A \cap B = \phi$ alors $a(E(A)x, E(B)x) = 0$ quel que soit x dans $\mathfrak{N}$, a dans $\mathcal{A}$.

Propriété VI.

Soit $\mathcal{P}$ un semi-clan défini sur un ensemble X.

Soit $\{\xi_x\}_{x\in\mathfrak{N}}$ une famille de $\mathcal{A}$-mesures définies sur $\mathcal{P}$ à valeurs dans $\mathfrak{N}$ indexée par $\mathfrak{N}$ telle que :

a) $\xi_{\alpha x+\beta y}(A) = \alpha\xi_x(A) + \beta\xi_y(A)$ quel que soit x,y dans $\mathfrak{N}$, α,β dans $\mathbb{C}$ et A dans $\mathcal{P}$.

b) Pour tout A dans $\mathcal{P}$, il existe une constante M_A telle que : $\sup_{a\in\mathcal{A}} \|\mu_{\xi_x,a}(A)\| \leq M_A\|x\|$ quel que soit x dans $\mathfrak{N}$,

alors il existe une $\mathcal{L}$-mesure définie sur $\mathcal{P}$, telle que : $E(A)x = \xi_x(A)$ quel que soit A dans $\mathcal{P}$.

La condition a) entraîne que pour tout A dans $\mathcal{P}$ l'application $E(A)$ de $\mathfrak{N}$ dans $\mathfrak{N}$ définie par $E(A)x = \xi_x(A)$ est linéaire.

La condition b) peut s'écrire sous la forme :

$$\sup_{a\in\mathcal{A}} a(\xi_x(A), \xi_x(A)) = \sup_{a\in\mathcal{A}} \|E(A)x\|_a \leq M_A\|x\|$$

c'est-à-dire l'application $E(A)$ est continue. La fonction d'ensemble de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{L}(\mathfrak{N})$ $E : A \to E(A)$ est une $\mathcal{L}$-mesure.

Soit E une $\mathcal{L}$-mesure ; les $\mathcal{A}$-mesures associées ξ_x admettent un prolongement unique au clan $R(\mathcal{P})$. De la même façon, nous pouvons étendre la fonction E à $R(\mathcal{P})$ en posant pour tout A dans $R(\mathcal{P})$

$$E(A) = \sum_{k=1}^{n} E(A_k)$$

où $\{A_k\}_{k=1}^n$ est une suite d'éléments de $\mathcal{P}$ deux à deux disjoints telle que $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. D'après la propriété précédente l'extension de E à $R(\mathcal{P})$ est encore une $\mathcal{L}$-mesure.

Corollaire VII.

Soit E une $\mathfrak{L}$-mesure définie sur un clan $\wp$.

Soit φ une fonction bornée sur X représentant un élément de Λ_{ξ_x} quel que soit x dans $\mathfrak{N}$.

L'application $A \to \varphi\chi_A E(A)$ de $\wp$ dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{N})$ avec

$$\varphi\chi_A E(A)(x) = \int_X \varphi\chi_A \xi_x(du)$$

définit une $\mathfrak{L}$-mesure notée φE.

D'après le théorème IV, φ définit une famille de $\mathfrak{A}$-mesures :

$$\eta_x(A) = \int_X \varphi(u)\chi_A \xi_x(du)$$

vérifiant les hypothèses de la propriété VI. Le corollaire est alors immédiat et nous obtenons :

$$\|(\varphi E)(A)\| \leq \|\varphi\|_\infty \|E(A)\| .$$

Définition. (Intégration)

Soit E une $\mathfrak{L}$-mesure définie sur un clan $\wp$.

Soit φ une fonction représentant un élément de Λ_{ξ_x} quel que soit x dans $\mathfrak{N}$. L'application :

$$x \to \int_X \varphi\xi_x(du)$$

est appelée intégrale de φ par rapport à E et sera notée $\int_X \varphi\, E(du)$.

L'opérateur $\int_X \varphi E(du)$ n'est pas en général borné.

2. MESURES SPECTRALES

Définition.

Une fonction d'ensemble E définie sur un clan unitaire $\wp$ sur X à valeurs dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{N})$ est appelée mesure spectrale si pour tout A,B dans $\wp$:

a) $E(A \cap B) = E(A) \circ E(B)$ avec $E(A \cap B) = 0$ si A et B sont disjoints.

b) $E(A)$ est $\mathfrak{A}$-autoadjoint, c'est-à-dire $a(E(A)x,y) = a(x,E(A)y)$ quel que soit x,y dans $\mathfrak{N}$, a dans $\mathfrak{A}$.

c) $E(X) = I$ (l'opérateur identique sur $\mathfrak{N}$)

d) E est dénombrablement additive sur $\wp$ pour la topologie forte d'opérateurs.

Les opérateurs $\{E(A)\}_{A\in\wp}$ forment une famille commutative d'opérateurs idempotents et vérifient :

- $E(A)\circ E(B) = E(A\cap B) = E(B)\circ E(A)$
- $E(A) = E(A\cap A) = E(A)^2$
- si $A \subset B$, $E(A)\circ E(B) = E(A)$
- pour tout A dans $\wp$ $\|E(A)\| \leq 1$.

Propriété VIII.

Toute mesure spectrale est une $\mathfrak{L}$-mesure.

La mesure ξ_x associée à x dans $\mathfrak{N}$ définie par $\xi_x(A) = E(A)x$ vérifie :

$$a(\xi_x(A),\xi_x(B)) = a(E(A)x,E(B)x)$$

$$a(\xi_x(A),\xi_x(B)) = a(E(A)\circ E(B)x,x) = a(E(A\cap B)x,x)$$

quel que soit x dans $\mathfrak{N}$, a dans $\mathfrak{A}$.

Si A et B sont disjoints, nous obtenons :

$$a(\xi_x(A),\xi_x(B)) = a(E(A\cap B)x,x) = 0$$

c'est-à-dire ξ_x est une $\mathfrak{A}$-mesure sur $\wp$ quel que soit x dans $\mathfrak{N}$.

Une mesure spectrale répond donc à la définition des $\mathfrak{L}$-mesures.

Propriété IX.

Soient E une mesure spectrale et, φ et ψ deux fonctions bornées sur X représentant deux éléments de Λ_{ξ_x} pour tout x dans $\mathfrak{N}$ alors :

a) L'opérateur $\int_X \varphi E(du)$ est continu et vérifie : $\|\int_X \varphi E(du)\| \leq \|\varphi\|_\infty$.

b) $(\int_X \varphi E(du)) \circ (\int_X \psi E(du)) = \int \varphi\psi E(du)$.

c) Si $|\varphi(u)| = 1$, $\forall u \in X$, l'opérateur $\int_X \varphi E(du)$ est unitaire.

Evaluons la norme de l'image d'un élément x par l'opérateur $\int_X \varphi E(du)$. Quel que soit a dans $\mathcal{A}$, nous avons :

$$a(\int_X \varphi \xi_x(du), \int_X \varphi \xi_x(du)) = \|\varphi\|^2_{\Lambda_{\xi_x}} \leq \|\varphi\|^2_\infty \|\xi_x(X)\|^2 = \|\varphi\|^2_\infty \|x\|^2 ,$$

c'est-à-dire :

$$\|\int_X \varphi E(du)\| \leq \|\varphi\|_\infty .$$

Les fonctions φ et ψ sont bornées et représentent des éléments de Λ_{ξ_x} quel que soit x dans $\mathfrak{N}$. Il est immédiat de montrer que les fonctions $\varphi\psi$, $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$ représentent encore des éléments de Λ_{ξ_x} quel que soit x dans $\mathfrak{N}$.

D'après la propriété III, nous obtenons pour tout a dans $\mathcal{A}$:

$$a(\int_X \varphi \xi_x(du), x) = \int_X \varphi d\mu_{\xi_x, a} = a(x, \int_X \bar{\varphi} \xi_x(du)) \qquad (1)$$

$$a(\int_X \varphi \xi_x(du), \int_X \psi \xi_x(du)) = \int_X \varphi \bar{\psi} \, d\mu_{\xi_x, a} = a(\int_X \varphi \bar{\psi} \xi_x(du), x) \qquad (2)$$

Par polarisation de la forme hermitienne positive a) l'égalité (1) donne :

$$a(\int_X \varphi \xi_x(du), y) = a(x, \int_X \bar{\varphi} \xi_y(du)) ,$$

c'est-à-dire d'après la définition [ch. III, § A.1], les opérateurs $\int_X \varphi E(du)$ et $\int_X \bar{\varphi} E(du)$ sont $\mathcal{A}$-adjoints.

Par un raisonnement analogue la relation (2) donne :

$$a(\int_X \varphi E(du) \circ \int_X \psi E(du) x, y) = a(\int_X \varphi\psi E(du) x, y)$$

quel que soit a dans $\mathcal{A}$ et x, y dans $\mathfrak{N}$.

Nous pouvons conclure que :

$$\int_X \varphi E(du) \circ \int_X \psi E(du) = \int_X \varphi\psi E(du) .$$

Les opérateurs intégrales sont commutatifs et :

Si la fonction φ est telle que $|\varphi| = 1$, la propriété b) donne :

$$\int_X \varphi E(du) \circ \int_X \bar{\varphi} E(du) = I$$

c'est-à-dire l'opérateur $\int_X \varphi E(du)$ est inversible et admet l'opérateur $\int_X \bar{\varphi} E(du)$ comme inverse. D'après les définitions [ch. III, § A.1] l'opérateur $\int_X \varphi E(du)$ est unitaire.

C - REPRESENTATION SPECTRALE DES OPERATEURS DANS LES ESPACES A ACCOUPLEMENTS

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'existence d'une mesure spectrale dans les espaces $\Lambda(S)$. Cette mesure correspond aux fonctions caractéristiques d'ensembles appartenant à $\Lambda(S)$. Cet exemple permettra, dans certains cas, d'associer à un groupe d'opérateurs unitaires $\{U_t\}_{t\in G}$ sur un espace à accouplements $(\mathfrak{N},\mathcal{A})$, une mesure spectrale E telle que :

$$U_t = \int_\Gamma \langle \gamma, t \rangle E(d\gamma) \quad \text{pour tout } t \text{ dans } G ,$$

c'est-à-dire d'obtenir une représentation analogue au théorème de Stone.

1. MESURE SPECTRALE DANS LES ESPACES $\Lambda(S)$

Soient $\mathcal{P}$ un clan unitaire sur X et $\mathcal{F}$ l'adhérence dans $\mathcal{M}'$ du sous-espace engendré par les fonctions $\mathcal{P}$-simples.

D'après la théorie générale des espaces $\Lambda(S)$ [ch. I, th. III], si $\mathcal{F}$ contient $\mathcal{C}$ et si l'ensemble de mesures S est compact pour la topologie $\sigma(\mathcal{M},\mathcal{F})$, l'image canonique de $\mathcal{F}$ est dense dans $\Lambda(S)$.

Les fonctions caractéristiques χ_A , pour A dans $\mathcal{P}$ appartiennent à $\Lambda(S)$ et la fonction d'ensemble définie sur $\mathcal{P}$ par $\chi(A) = \chi_A$ est évidemment une $\mathcal{A}$-mesure. L'ensemble des mesures S associé à ξ est formé des

restrictions de S au clan unitaire $\wp$ et nous avons pour A et B dans $\wp$

$$\int \xi(A)\xi(B)ds = \int \chi_A \chi_B ds = s(A \cap B)$$

quel que soit s dans S .

L'application linéaire h_A de Λ dans Λ associée à la fonction caractéristique χ_A pour A appartenant à $\wp$ est continue :

- $h_A(f) = \chi_A f$
- $\|h_A\| \leq 1$.

La fonction d'ensemble E de $\wp$ dans $\mathcal{L}(\Lambda, \Lambda)$ définie par $E(A) = h_A$ est une mesure spectrale et vérifie :

- $E(A \cap B) = E(A).E(B)$
- $E(A)$ est $\mathcal{C}$-autoadjoint
- $E(X) = I$
- E est dénombrablement additive sur $\wp$ pour la topologie forte d'opérateurs.

Soit f un élément de Λ, la $\mathcal{C}$-mesure associée ξ_f coïncide avec la mesure $\xi_f(A) = \int_A f E(du) = \int_X f\chi_A E(du)$ [th. IV] et d'après la définition de E, $\xi_f(A) = h_A.f$.

Supposons que $\Lambda(S)$ soit l'adhérence dans $\cap(S)$ du sous-espace engendré par les fonctions $\wp$-simples où $\wp$ est un clan unitaire ; nous avons alors la propriété suivante :

Propriété X.

Soit φ une fonction bornée appartenant à $\Lambda(S)$. L'opérateur h_φ associé [ch. III, p. 29] admet la représentation :

$$h_\varphi = \int_X \varphi E(du)$$

où E est la mesure spectrale définie sur $\wp$ par $E(A) = h_A$.

Démonstration :

Soit f un élément de $\Lambda(S)$. L'image de f par h_φ est représentée par l'élément $\varphi.f$.

Calculons l'intégrale $\int_X \varphi E(du).f$. Pour cela, remarquons que la fonction d'ensemble définie sur $\mathcal{P}^X$ par $A \to \int_X \chi_A.\varphi E(du).f$ est une $\mathcal{C}$-mesure η_f . Pour tout A dans $\mathcal{P}$, nous avons $\eta_f(A) = \chi_A f\varphi$. L'intégrale $\int_X \eta_f(du)$ vérifie $\int_X \eta_f(du) = \eta_f(I)$. C'est-à-dire, nous obtenons :

$$\int_X \varphi(u)E(du).f = f.\varphi = h_\varphi(f)$$

2. ESPACES A ACCOUPLEMENTS

Soient $(\mathfrak{N},\mathcal{C})$ un espace à accouplements et $\{U_t\}_{t\in G}$ un groupe d'opérateurs unitaires fortement continu (ou $\mathcal{C}$-continu).

Soient $\mathcal{P}$ un clan unitaire sur Γ et $\mathcal{F}$ l'adhérence dans $\mathcal{M}'$ du sous-espace engendré par les fonctions $\mathcal{P}$-simples. L'ensemble $\mathcal{F}$ est une sous-algèbre stellaire de $\mathcal{M}'$. Sur l'espace à accouplement $(\mathfrak{N}_\mathcal{F},\mathcal{C})$, nous avons le théorème suivant :

Théorème XI. (Représentation spectrale)

Si $\mathcal{F}$ contient $\mathbb{C}$, alors il existe une mesure spectrale E unique définie sur $\mathcal{P}$ telle que pour tout t dans G , on ait :

$$V_t = \int_\Gamma \langle \gamma, t\rangle E(d\gamma)$$

où $\{V_t\}_{t\in G}$ est la restriction à $\mathfrak{N}_\mathcal{F}$ du groupe $\{U_t\}_{t\in G}$.

Tout opérateur commutant avec la famille $\{V_t\}_{t\in G}$ commute avec $E(A)$ pour tout A dans $\mathcal{P}$.

Démonstration :

Les opérateurs $\{H_A\}$ associés aux éléments A de $\mathcal{P}$ par $H_A.x = I_x^{-1}[\chi_A.I_x(x)]$ sont des opérateurs subordinatifs [ch. IV, § D].

Soit E la fonction d'ensemble définie sur $\mathcal{P}$ par $E(A) = H_A$.

L'application H de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{S}$ est un homomorphisme, et nous avons :

- $E(A).E(B) = E(A \cap B)$
- $E(A)$ est $\mathcal{A}$-autoadjoint
- $E(\Gamma) = I$.

Les mesures ξ_x associées à chaque élément x de $\mathfrak{N}_{\mathcal{F}}$ sont des $\mathcal{A}$-mesures. En restriction, à chaque sous-espace $\mathcal{V}_x$, la fonction d'ensemble E est une mesure spectrale [ch. V, § C.1] puisque $\mathcal{V}_x$ est isomorphe à Λ_x . Les mesures $\mu_{\xi_x,a}$ associées à ξ_x sont les restrictions des mesures spectrales S_x au clan $\mathcal{P}$.

La fonction E est une mesure spectrale. Pour tout x dans $\mathfrak{N}_{\mathcal{F}}$ d'après la propriété X, nous avons :

$$V_t x = \int_\Gamma \langle \gamma, t \rangle \xi_x(d\gamma)$$

c'est-à-dire, nous obtenons :

$$V_t = \int_\Gamma \langle \gamma, t \rangle E(d\gamma) \ .$$

Pour tout A dans $\mathcal{P}$ l'opérateur subordinatif $E(A)$ est limite d'une suite de polynômes trigonométriques généralisés de la forme $\pi = \sum_i \lambda_i U_{t_i}$ pour la topologie forte d'opérateurs [ch. IV, § C].

La mesure E est donc déterminée de façon unique sur $\mathcal{P}$ et pour tout A dans $\mathcal{P}$ si T est un opérateur t-invariant alors T commute avec $E(A)$.

Dans le cas où $\mathfrak{N}_{\mathcal{F}}$ est séparable (ou $\mathcal{M}_{\mathfrak{N}_{\mathcal{F}}}$ est engendré par une suite de mesures mutuellement singulières) en utilisant le théorème [X, ch.IV] nous obtenons :

Théorème XII.

Si l'espace $\mathcal{M}_{\mathfrak{N}_{\mathcal{F}}}$ est engendré par une suite de mesures mutuellement singulières, alors pour tout opérateur subordinatif continu T , il existe une fonction borélienne φ bornée telle que :

- $T = \int_\Gamma \varphi E(d\gamma)$

- $\|T\| = \|\varphi\|_{\mathcal{M}'/\mathcal{M}^\circ_{\mathfrak{N}_\mathcal{F}}}$

où E est la mesure spectrale donnée par le théorème XI.

La fonction φ est donnée par le théorème [X, Ch.IV] et vérifie $\|T\| = \|\varphi\|_{\mu'/\mu^\circ_{\mathfrak{N}_\mathcal{F}}}$.

En appliquant la propriété IX , nous pouvons associer à φ l'opérateur continu : $H_\varphi = \int_\Gamma \varphi E(d\gamma)$. Pour tout x dans $\mathfrak{N}_\mathcal{F}$, nous savons :

$$H_\varphi(x) = \int_\Gamma \varphi \xi_x(d\gamma) \ .$$

Soit $\{\pi_p\}_{p\in\psi}$ un filtre de polynômes trigonométriques convergent vers φ . Les opérateurs associés $\sum_k \lambda_{p_k} U_{t_{p_k}}$ convergent fortement vers T et nous avons :

$$H_\varphi(x) = \lim_\psi \int_\Gamma \pi_p \xi_x(d\gamma) = \lim_\psi \sum_k \lambda_{p_k} U_{t_{p_k}} x = Tx$$

c'est-à-dire T admet la représentation :

$$T = \int_\Gamma \varphi E(d\gamma) \ .$$

NOTATIONS

CHAPITRE I

	pages		pages
$\mathfrak{C}_o$	1	$\cap(S)$	1
$\mathfrak{K}$	2	$\wedge(S)$	1
$\mathfrak{m}$	1	$\cup(S)$	2
$\mathfrak{m}'$	3	$\sum$	3
$\mathfrak{N}_{r,c}$	4	$\backsim$	2
S-nul	1	$\sim$	2

CHAPITRE II

$a(x,y)$	9	$(\mathfrak{N},\mathfrak{A})$	11
$\mathfrak{A}$	9	$\mathfrak{N}_a$	12
$\mathfrak{A}_\ell$	13	$\bigcup_{a\in\mathfrak{A}} \mathfrak{N}_a$	13
$\mathfrak{H}$	10	$N(\ell)$	13
$\ell_a(\bar{y})$	12	$\bar{y}$	12
$L(a,y)$	12		

CHAPITRE III

$C_x, C_{x,y}$	23	M_x, M_L	31
G	22	$\mathfrak{m}_{\mathfrak{N}\times\mathfrak{N}'}$	31
Γ	24	$\mathfrak{m}_{\mathfrak{N}}$	32
h_φ, h_x	29	n_x	28
$\mathfrak{H}$	33	$S_x, S_{x,y}$	24
I_x	28	τ_t	28
$\mathfrak{L}(\mathfrak{N})$	20	$\{U_t\}_{t\in G}$	22
Λ_x	28	$\mathcal{V}_x$	26
M	30		

CHAPITRE IV

	pages		pages
$E(d\gamma)$	44	P	46
H_{φ}	35	Q	46
m'	45	$\mathcal{S}$	51
$\mathcal{M}^{\circ}_{\mathcal{R}}$	51	$\mathcal{S}_{\Sigma}$	53
$\mathcal{M}'/\mathcal{M}^{\circ}_{\mathcal{R}}$	51	T_x	37
$\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$	56	$\mathcal{T}_x$	37

CHAPITRE V

$B(\mathcal{P}), R(\mathcal{P})$	64	ξ ($\mathcal{A}$-mesure)	60
$\mathcal{B}_{\mu}, \mathcal{B}_{o}$	66	Λ_{ξ}	69
$\mathcal{B}_{o}$-simple, $\mathcal{P}_{o}$-simple	69	m_{μ}	64
E ($\mathcal{L}$-mesure)	73	$\mu_{\xi,a}$	61
E (mesure spectrale)	75	$\mathcal{P}$ (semi-clan)	59
h_A	79	S_{ξ}	61
H_A	80	$\mathcal{V}_{\xi}$	72

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. ARENS - "Operations induced in function class".
Monat für Math., 55 (1951) pp. 1-19.

[2] J.P. BERTRANDIAS - "Espaces de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre p ".
Supp. Bull. Soc. Math. France - n° 5 (1966).

[3] J.P. BERTRANDIAS - "Espaces L^p relatifs à une famille de mesures".
Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 21.4 (1971), pp. 267-291.

[4] J.P. BERTRANDIAS - "Opérateurs subordinatifs sur des espaces de fonctions bornées en moyenne quadratique".
(A paraître, J. de Maths Pures et Appliquées).

[5] W. BOGDANOWICZ- "Integral representation of linear continuous operators from the space of Lebesgue-Bochner summable functions into any Banach space".
Proc. N.A.S.

[6] N. BOURBAKI - "Intégration".
Ch. 1 à 4 - Hermann (1952).

[7] N. BOURBAKI - "Topologie générale".
Livre III, Fascicule de résultats - Hermann (1953).

[8] N. BOURBAKI - "Espaces vectoriels topologiques".
Ch. 3 à 5 - Hermann (1955).

[9] N. BOURBAKI - "Intégration".
Ch. 9 - Hermann (1965).

[10] J. DIEUDONNE - "Sur la convergence des suites de mesures de Radon". An Acad. Brasil Ci 23 (1951) 21-38, pp. 277-282.

[11] N. DUNFORD and J. SCHWARTZ - "Linear Operator". Part I, New-York Interscience Publishers (1958).

[12] L. GILLMAN and M. JERISON - "Ring of continuous functions". Van Nostrand Company, Inc. (1960).

[13] A. GROTHENDIECK - "Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type C(K) ". Canad J. Math. 3 (1953), pp. 129-173.

[14] P.R. HALMOS - "Measure theory". 11e ed. Van Nostrand Company, Inc. (1966).

[15] E.R. LORCH - "On a calculus of operators in reflexive vector spaces". Trans. Amer. Math. Soc. 45 (1939), pp. 217-234.

[16] G. LUMER - "Algèbres de fonctions et espaces de Hardy". Lectures Notes in Math. n° 75 Springer (1968).

[17] P. MASANI - "The normality of time-invariant, subordinative operators in a HILBERT space". Bull. Am. Math. Soc. 71 (1965), pp. 546-550.

[18] P. MASANI - "Orthogonally scattered measures". Advances in Math. 2 (1968), pp. 61-117.

[19] P. MASANI - "Quasi-isometric measures and their applications". Bull. Am. Math. Soc. 76 (1970), pp. 427-528.

[20] M.E. MUNROE - "Introduction to measure and integration". Addison Wesley, Cambridge, Mass (1953).

[21] D. MURAZ - "Critères de compacité étroite sur un groupe abélien localement compact". Bull Sc Math (à paraître).

[22] J. Von NEUMANN - "Functional Operators". Vol. I Annals of Math. Studies n° 21, Princeton University Press, Princeton (1950).

[23] F. RIESZ et B. SZ. NAGY - "Leçons d'Analyse fonctionnelle". 3e éd., Académie des Sciences de Hongrie (1955).

[24] W. RUDIN - "Fourier Analysis on groups". Interscience (1962).

[25] H.H. SCHAEFFER - "Spectral measures in locally convex algebras". Acta Math 107 (1962), pp. 125-173.

[26] H.H. SCHAEFFER - "Topological vector espaces". The Macmillan Company, New-York, Collier-Macmillan limited, London (1966).

[27] F. TREVES - "Topological vector spaces, distributions and kernels". Academic Press Inc. (1967).

[28] I. TULCEA - "Spectral operators on locally convex spaces". Bull Amer. Math. Soc. 67 (1961) 125-128.

LISTE DES PROFESSEURS

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES.

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrométallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques Pures
	GALVANI Octave	Mathématiques Pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GERBER Robert	Mathématiques Pures
	GIRAUD Pierre	Géologie
	KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
Mme	KOFLER Lucie	Botanique et Physiologie végétale
MM.	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
MM.	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Seméiologie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
	PEBAY-PEYROULA J.C.	Physique
	PERRET René	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REULOS René	Physique industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLAND François	Zoologie
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M.	VERAIN André	Physique
Mme	VEYRET Germaine	Géographie
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BULLEMER Bernhard	Physique
	RADHAKRISHNA Pidatala	Thermodynamique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	AUBERT Guy	Physique
	BEAUDOING André	Pédiatrie
MM.	BERTRANDIAS Jean Paul	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	POUJOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction Mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
M.	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BLIMAN Samuel	Electronique (E.I.E.)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (C.U.S.)
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUVARD Maurice	Mécanique des fluides
	BRIERE Georges	Physique expérimentale
	BRODEAU François	Mathématiques (I.U.T. B)
	BRUGEL Lucien	Energétique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et or gén.ᵗnese
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (E.F.P.)
	CHIBON Pierre	Biologie animale

	COHEN-ADDAD J.P.	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique
	CROUZET Guy	Radiologie
	DURAND Francis	Métallurgie
	DUSSAUD René	Mathématiques (C.U.S.)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GENSAC Pierre	Botanique
	GERMAIN Jean Pierre	Mécanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques appliquées
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	JOLY Jean René	Mathématiques pures
	JOUBERT Jean Claude	Physique du solide
	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
	KAHANE André	Physique générale
	KUHN Gérard	Physique
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LANCIA Roland	Physique atomique
	LE JUNTER Noël	Electronique
	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean Marie	Physique nucléaire
	LONGEQUEUE Jean Pierre	Physique nucléaire
	LUU DUC Cuong	Chimie organique
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (C.U.S.)
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MICOUD Max	Maladies infectieuses
	MOREAU René	Hydraulique (I.N.P.)
	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (I.U.T. B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean Claude	Physique du solide
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mlle	PIERY Yvette	Biologie animale
MM.	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (I.U.T. B)
	ROUGEMONT (DE) J.	Neuro-Chirurgie
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées
	VEILLON Gérard	Mathématiques appliquées (I.N.P.)
MM.	VIALON Pierre	Géologie
	VOOG Robert	Médecine interne
	VROUSSOS Constantin	Radiologie
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	CHEEKE John	Thermodynamique
	GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
	YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme	BERIEL Hélène	Physiologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

VU,

Grenoble, le

Le président de la thèse,

C. CHABAUTY

VU, et permis d'imprimer

Grenoble, le

Le président de l'Université
scientifique et médicale,